Һ. Н. АҒАЕВ

ҺӘГИГИ ӘДӘДЛӘР ВӘ ЛИМИТЛӘР

АЗӘРНЕФТНӘШР
БАКЫ - 1958

Һ. Н. АҒАЕВ

Досент, физика-риязийят элмләри намизәди

ҺӘГИГИ ӘДӘДЛӘР ВӘ ЛИМИТЛӘР

АЗӘРБАЙЧАН ДӨВЛӘТ НЕФТ ВӘ ЭЛМИ-ТЕХНИКИ ӘДӘБИЙЯТ НӘШРИЙЯТЫ

Бакы — 1958

38—4—2

АННОТАСИЯ

Охучулара тәгдим эдилән бу китаб мүәййән мә'нада риязиййата киришдир.

Китабда һәгиги әдәдләрин мәншәи вә инкишаф йоллары көстәрилир. Натурал әдәдләрдән башлаяраг әдәд анлайышы ардычыл сурәтдә кенишләндирилир вә һәгиги әдәдләрин онлуг кәсрләрлә нәзәриййәси гурулур. Китабда ардычыллыглар вә лимитләр бәһси илә янашы оларaг бир сыра тарихи мәсәләләр вә һәр бәһсин өзүнә аид мисаллар топланмышдыр. Бу чәһәт онун кениш охучу күтләләри тәрәфиндән истифадә эдилмәсинә имкан ярадыр.

Китабдан орта мәктәб вә техникумларын шакирдләри һабелә риязиййат һәвәскарлары истифадә эдә биләрләр.

Китаб, али риязиййат охуян тәләбәләрин вә риязиййаты өзбашына өйрәнән шәхсләрин риязи билийини артырмаға, риязиййатын маһиййәтини баша дүшмәйә билаваситә көмәк эдә биләр.

Китабдан орта мәктәбин риязиййат мүәллимләри көмәкчи дәрслик вә риязиййат дәрнәкләринин материаллары кими истифадә эдә биләр.

Гашим Низам оглы Агаев

Доц. канд. физико-математических наук

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА И ПРЕДЕЛЫ

Редактору *М. Һ. Һүсейнов*

Нәшриййат редактору *И. С. Зәркәрли*

Корректорлары *С. М. Абдуллаева Б. М. Абдуллаев*

Йығылмаға верилмиш 26/IX-1958. Чапа имзаланмыш 16/XII-1958. Кағыз форматы $60\times 92^1/_{16}$. Чап вәрәги 10,25. Һесаб-нәшриййат вәрәги 9,54. ФГ 13359. Сифариш 525/485. Тиражы 2000. Гиймәти 5 ман. 10 гәп.

Азәрнефтнәшр, Бакы, Сталин проспекти, 73

Азәрбайчан ССР Мәдәниййәт Назирлийинин „Гызыл Шәрг" мәтбәәси. Бакы, Һәзи Асланов күчәси, 80.

I ҺИССӘ

ӘДӘД АНЛАЙЫШЫНЫН ТӘКАМҮЛҮ

§ 1. НАТУРАЛ ӘДӘДЛӘРИН МӘНШӘИ ВӘ ТӘШӘККҮЛҮ

Ибтидаи ичма дөврүндә яшаян инсанлар өз тәкмилләшмәмиш нәзәрләрини тәк-тәк әшйя дейил, әшя чохлуғуна салмышлар. Инсан чәмиййәти әшя чохлуғуну, мәсәлән, һейван сүрүсүнү, гушларын дәстәсини, мешә ағачларыны вә с. айры-айры әшяя айырынча узун бир тарихи инкишаф йолу кечмишдир.

Әшяны бир-бириндән айыра билмәк, фәрдиләшдирмәк вәрдишини газанмаг ишиндән әввәл онларын күллү мигдарда даһа бәсит олан дикәр кейфиййәтләрини өйрәнмәк лазым кәлмишдир. Белә кейфиййәтләр чох мүхтәлиф вә рәнкарәнкдир. Мәсәлән вәһши һейванлары бир-бириндән айыран онларын дәһшәтли сәсләрини, горхулу көркәмләрини, сүр'әтли гачышларыны вә и. а. кими кейфиййәтләрини кәстәрмәк олар. Әшянын, садә олса да, белә кейфиййәтләрини һисс эдиб өйрәндикдән сонра онлары саймаг имканлары мейдана чыхмышдыр. Һәтта бу чәһәт мәчази мә'нада ишләдилән „адамы сайыб вә я саймамаг“ кими ибарәси, чох күман ки, әввәлләрдә әшянын сайылмасы ишинин онларын кейфиййәти илә әлагәдар олмасыны әкс этдирмиш вә дилимиздә мүһафизә эдилмишдир.

Демәли, саймаг үчүн сайыласы әшянын тәкчә варлығы дейил, онларын кейфиййәтләринин дә мүһүм ролу олмушдур. Мәһз буна көрә дә ер үзүндә илк дәфә яшамаға башлаян инсан чәмиййәти эһтияч үзүндән истифадә этдийи шейләри сая билмәк вәрдишинә малик дейилди. Инсанлар оду эһтияч гаршысында тапдығы кими, чи имләри саймағы да өз әмәли фәалиййәтләриндә вәрдиш этмиш вә нәсилдән-нәслә кечирмишләр. Һәтта чох гәдим әфсанәләрдә од вә сайы аллаһын пейғәмбәрләрә вә гәһрәманлара бәхш этдийиндән вә я онларын аллаһдан зорла од вә сай алдығындан данышылыр. Бу бир әфсанә олараг галса да һәмин әфсанәдән инсан оғлунун ер

үзәриндә бөйүк эһтияч гаршысында галараг од вә сай арадығы бир һәгигәт дуюлур.

Әшя чохлуғунун онларын тәбиәтилә әлагәдар олмаян үмуми хассәләрини тапыб ашкара чыхаргмаг һәр дөврдә олдуғу кими һәмин дөврүн дә чәтин мәсәләләриндән бири олмушдур. Бу чәтин мүбаризә йолларында күлли мигдарда мүвәффәгиййәтләр вә гейри-мүвәффәгиййәтләр олмуш, силиниб кедән вә силинмәйән изләр бурахылмышдыр.

Узун заман апарылан мүшаһидә вә тәчрүби фәалиййәт нәтичәсиндә инсанын билик һоризонтунда вә диггәт мәркәзиндә дуран чисимләр өз тәбии чизкиләрини инсан бейнинә нәгш этди вә онда реал аләмин кет-кедә дүзкүн тәсәввүрләрини ятратды. Беләликлә, әдәд вә фигур анлайышы яранмаға башланды.

Әшяны бир-бириндән айыран кейфиййәтләрини гисмән өйрәндикдән сонра сай просесинин икинчи мәрһәләсиндә һәмин кейфиййәтләри нәзәрә алмамаг вә бир нечә әшя чохлуғуна гаршы, дикәр әшя чохлуғу гоймаг вә беләликлә чохлуглар арасында уйғунлуг яратмаг кими вәрдишләри газанмаг эһтиячы ортая чыхды вә илк дәфә тәбии олараг әшя илә әл бармаглары арасында уйғунлуг ярадылды. Беләликлә, әл бармаглары сайма просесиндә бир „стандарт“ чохлуг вәзифәсини дашымаға башлады вә һәр дәфә шейләри саяркән һәр бир шейә гаршы бир бармаг гатламаг вә я айырмаг вәрдиши газанылды.

Лакин инкишафын бу мәрһәләсиндә сай просесинин үмуми чәһәтләри һәлә инсан фикриндә кәскин айырд эдилмәмишди; мәсәлән, „үч адам“, „үч ағач“, „үч чай“ чохлугларынын һамысында үч олмасы кими үмумилик анлашылмаз галмышды.

Бир сыра гәбиләләрин дилләриндә сайла әлагәдар олан сөзләри тәдгиг этдикдә мүәййән эдилмишдир ки, эйни мигдарда көтүрүлән мүхтәлиф әшя чохлуғу мүхтәлиф сөзләрлә адландырылмышдыр. Мәсәлән, „үч адам“, „үч чай“ кими сөзләрин һәр икисиндә „үч“ сөзү дейил, айры-айры сөзләр ишләдилмишдир. Лакин сайла әлагәдар ишләдилән сөзләр чох дейилди. Әшя чохлуғуну фәрдиләшдирмәйәрәк адландырмаг үчүн „чох“ сөзү енә дә мүхтәлиф шәкилдә ишләнирди. „Чох адам“, „чох даш“ вә и. а сөзләриндә „чох“ сөзү әшянын ады илә бағланараг мүхтәлиф шәкилдә ишләнирди.

Тәдричән мүхтәлиф чохлуглары саяркән үмуми олан чәһәтләр мейдана чыхмаға башлады. „Үч адам“, „үч ағач“, “үч чай“ дейилдикдә „үч“ сөзү онун бағландығы адам, ағач, чай кими чисимләрин маһиййәтиндән айрылды вә мүчәррәдләшди. Бу гайда илә сай просесинин нәтичәсиндә бир, ики, үч вә с. натурал әдәдләр мейдана кәлди. **Демәли, чисимләрин конкрет кейфиййәтләриндән, хассәләриндән узаглашараг, онларын сайларыны көстәрән хассәләрини өйрәнмәк нәтичәсиндә**

натурал әдәдләр әмәлә кәлди вә инсанын эһтиячына табе эдилди. Лакин эһтияч даһа чох шейләри саймаг лүзумуну яратды. Бир вә я ики әлин бармаглары бу мәгсәд үчүн кифайәт этмәди. Буна көрә дә ени вә даһа зәнкин чохлуглар ишләдилди, мәсәлән, чубуглар үзәриндә ачылан кәртикләр вә и. а. Сонралар исә натурал әдәдләр сырасы бу мәгсәд үчүн истифадә эдилән ән сәмәрәли бир чохлуг олду (һәмин фикри ашағыда изаһ эдәчәйик).

Һәр бир халгын гаршысында шифаһи нитг васитәсилә сай адларыны яратмаг, бир нечә сөз васитәсилә мүмкүн гәдәр бөйүк натурал әдәдләри ифадә этмәк кими вачиб мәсәләләр дурмуш, бу вә я дикәр шәкилдә һәлл эдилмишдир. Башга халглар кими Азәрбайчан халгы да өз әмәли фәалиййәтиндә бу мәсәләнин һәлли йолларында шифаһи сай адларыны сөз эһтиятлары фондуна дахил этмиш вә инкишаф этдирмишдир. Бу сай адлары бүтүн халгларда бармаглары саяркән („бармаг һесабы“) ишләдилән уйғун сөзләрлә адландырылмышдыр.

Бир чох дилләрдә олдуғу кими Азәрбайчан дилиндә дә шифаһи сайын әсасыны ашағыдакы сөзләр тәшкил эдир: бир (ваһид гәбул эдилмиш), ики, үч, дөрд, беш, алты, едди, сәккиз, доггуз, он (онлуг), йүз (йүзлүк), мин (минлик), милйон, милярд, трилйон вә с. Галан сай адлары бу сөзләрин бу вә я дикәр бирләшмәси шәклиндә ярадылмышдыр. Гейд этмәк лазымдыр ки, дилимизә милйон, милярд, трилйон сөзләри башга дилләрдән кечмишдир. Бу сөзләрин мәншәи һаггында белә бир рәвайәт вардыр. Дейиләнләрә көрә Венесия сәйяһы Марко Поло (XIII әср) Узаг Көй империясында (Чинин гәдим адыдыр) көрдүйү түкәнмәз мигдарда инсан вә сәрвәт эһтиятыны шәрһ этдикдә, ады мә'лум олан әдәдләрин кифайәт этмәдийини көрүб „милйон“ сөзүнү ишләтмишдир. Италянча *millione* (милйонэ) сөзү *mille* (милле—йүз демәкдир) сөзүнүн бөйүдүлмүш шәклидир. Сонралар мин милйон, билйон вә я милярд сөзләри ишләдилмишдир. Галан әдәд адлары латынлашдырылараг гурулмушдур вә бүтүн дүняда бир чүр ишләдилмәкдәдир. Бу адларын нечә ярадылдығыны билмәк үчүн әдәдләрин һәр үч мәртәбәсинин бир синиф адландырылмасына нәзәр етирмәк лазымдыр. Садә тәклик, онлуг, йүзлүк биринчи синифдән; минлик, он минлик, йүз минлик икинчи синифдән; милйон, он милйон, йүз милйон үчүнчү синифдән; билйонлар (он, йүз билйон) дөрдүнчү синифдән ибарәтдир. Дөрдүнчү синифдән башлаяраг һәр ени синфи адландырмаг үчүн синфин нөмрәсини ики ваһид азалдыб алынан вә латынча дейилән әдәдин ахырына „илйон“ шәкилчисини әлавә этмәк лазымдыр.

Мәсәлән: бешинчи синфин ваһидләри „трилйон“ адланыр, чүнки 5—2=3-дүр. 3 исә латынча *tres* (трэс) демәкдир. Мүрәккәб сөзләрдә *tres* сөзү *tri* (русча „три“ дейилдийи кими) сөзүнә кечир.

Бу гайда илә, һәр бир натурал әдәди бир нечә сөзлә адландырмаға, *шифаһи сай системи* дейилир.

Башга дилләрдә олдуғу кими Азәрбайчан дилиндә дә **онлуг сай**[1] системи гәбул эдилмишдир. Азәрбайчан дилиндә әллийә гәдәр юварлаг онлуглардан ибарәт олан сай адлары мүхтәлифдир (он, ийирми, отуз, гырх, әлли). Алтмыш, етмиш, сәксән, догсан адлары исә алты, едди, сәккиз, доггуз сөзләриндән әмәлә кәлмишдир.

Рус дилиндә вә бә'зи башга дилләрдә юварлаг онлугларын адлары (десять, двадцать, тридцать, пятдесят вә и. а.) бир, ики, үч вә и. а. сөзләринин сонуна тәһриф эдилмиш „десять" (он) сөзү әлавә этмәклә алынымр вә бурада ялныз „сорок" (гырх) сөзү мүстәсналыг тәшкил эдир.

Белә бир тәбии суал мейдана чыхыр: нә үчүн халглар арасында шифаһи онлуг сай системи гәбул эдилмишдир.

Ф. Энкелсин дедийинә көрә инсанлар сайы он бармаглары үзәриндә өйрәндийиндән он әдәди, шифаһи сай системинин әсасы гәбул эдилмишдир.

Шифаһи нитгдән языя кечмәк тарихи әрәфәсиндә рәгәмләрин мейдана чыхмасы, беләликлә һәр бир сайын нәтичәсинин бир нечә рәгәм васитәсилә ифадә эдилмәси, натурал әдәдләрин тәшәккүлүндә мүһүм вә һәлледичи рол ойнады.

Язы ишләринин инкишафы ени әдәдләр аләминин кәшфинә тәкан верән мүһүм амилләрдән бири олмушдур. Айры-айры шейләр үзәриндә чәкилән нәгшләр, хәтләр, әдәдләри ишарә этмәк үчүн бабилиләрин кил язылары, мисирлиләрин мүһафизә эдәрәк сахладығы гәдим Ринд папируслары[2] (эрамыздан тәгрибән ийирми әср габаг язылмыш) гәдим мәдәнийyәтин зәнкин абидәләри олараг галыр вә әдәдләр аләминин гаранлыг кечмишини бир гәдәр ишыгландырыр.

Рәгәмләрин ерләринә көрә гиймәтләринин тә'йин эдилмәси әсасында гурулан сай системинин Сумериләр вә Бабилиләр тәрәфиндән кәшф эдилдийи күман эдилир.

---

[1] Онлуг сай системи һаггында ашағыда этрафлы мә'лумат вериләчәкдир.

[2] Ринд папируслары эрамыздан габаг XXI—XVIII әсрин абидәсидир. Үзәриндә һесаб вә чәбр мәсәләләри язылан папируслар онларын саһиби Риндин ады илә адланыр (бу папируслар Ахмес папируслары да адланыр. Ахмес, эрамыздан 2000 ил габаг һәмин папируслары тәртиб эдиб язан шәхсдир). Һазырда Ринд папируслары Британия музейиндә (Лондон) вә Москвада А. С. Пушкин адына тәсвири инчәсәнәт музейиндә сахланылыр. Ринд папирусларында 84 мәсәлә топланмышдыр. Бу мәсәләләр кәсрләр үзәриндә әмәлләрә, дүзбучаглынын, үчбучағын, трапесиянын вә даирәнин саһәләринин һесабланмасына һәср эдилмишдир. Әләвә дә һәмин мәсәләләр ичәрисиндә дүзбучаглы паралелепипедин вә силиндрин һәчмләринин һесабланмасына аид мәсәләләр вардыр. Һесаба аид мәсәләләр исә мүтәнасиб бөлмәләрә, һәм дә силсиләләрә һәср эдилмишдир.

Халдейләрин[1] (кәлданиләр) сай системи һаггында ашағыдакы мә'лумат кәлиб бизә чатмышдыр.

Халдейләрин сай системи алтмышлыг систем олмушдур. Бу әдәди халдейләр сос (*soss*) адландырмышлар. 600 әдәди нәр (*ner*) ады илә адландырылмышдыр. 3600 әдәдинә сар (*sar*) дейирмишләр. Бу адлар бизим һазырда ишләтдийимиз онлуг системиндәки он, йүз, мин сөзләри, оникилик системиндә он ики (дүжүн), йүз гырх дөрд (*gross*) вә и. а. мүгабили кими ишләнмишдир. Белә бир адларын ишләдилдийини көстәрмәк үчүн ашағыдакы языя мүрачиәт эдәк. Һөкмдар Саргон Хорсабад шәһәринин даирәсини белә көстәрмишдир:

Бурада *Sar Sar Sar Sar*, *Ner Ner Ner*, *Sos*, $1\frac{1}{2}$ икигат *Qanu* (вә я 3 *Qani*), 2 *Ammat*[2]. сөзләри язылмышдыр.

Язылмыш бу рәгәмләри охуянлардан бири (Лепсиус) белә изаһ этмишдир:

$$
\begin{array}{lll}
4\ Sar = 4\times 3600 & = 14400 & Ammat \\
3\ Ner = 3\times 600 & = 1800 & \text{„} \\
1\ Sos = 1\times 60 & = 60 & \text{„} \\
3\ Qani & = 18 & \text{„} \\
2\ Ammat & = 2 & \text{„} \\
\hline
\end{array}
$$

Ҹәми: 16280 *Ammat* (дирсәк).

Гәдим язылардан мә'лум олмушдур ки, халдейләрдә 1-дән 60 гәдәр олан һәр бир натурал әдәд бир аллаһын адынын ишарәси имиш.

Кил чәдвәлләрдә аллаһларын адлары гаршысында бу адлар язылмышдыр:

Anu—60	*Sin*—30
Bel—50	*Samas*—20
Nisruk—40	*Bin*—10

Башга кил чәдвәлләрдән мә'лум олмушдур ки, Халдейләр чинләри һәр бириндә 7 чин олмагла синифләрә бөлүрмүшләр. Онлар 7 әдәдини мистик бир әдәд кими дүшүнүрмүшләр. Бүтүн бунлар Халдейләрин мөвһумат тәрәфдән мискин бир кеч-

---

[1] Халдейләр индики, Месопотамияда яшамышлар (Дәчлә вә Фәрат чайларынын саһилләриндә ерләшиб). Чох гәдим заманларда белә бу өлкәдә йүксәк мәдәни вә күчлү бир дөвләт гурулушунун олмасы вә һәтта, дейиләнләрә көрә дөвләтин биринчи дәфә бу өлкәдә мейдана кәлмәси һаггында рәвайәт вардыр. Гәдим заманларда Халдейләрин әдәд вә астраномия һаггында илк биликләрә йийәләндикләрини дә сөйләйән олмушдур. XIX әсрин әввәлләриндә тапылан абидәләр бу фикри исбат этмишдир. Бу абидәләрә әсасән гәдим асуриләрин вә бабилиләрин риязи мәдәнийиәтә саһиб олдуглары сөйләнилир.

[2] **Ammat—дирсәк демәкдир тәхминән 525 *мм*-ә бәрабәрдир.**

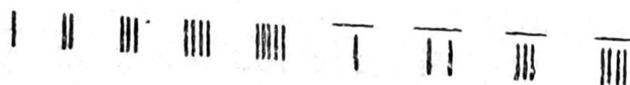
мишини хатырлатмагла бәрабәр онларын сай вә әдәдләрә чох гәдим заманларда ишләндийини сүбут эдир.

Сай системи сонралар һиндлиләр тәрәфиндән инкишаф этдирилмиш вә мәдәни ирсин ән мөһтәшәм абидәси кими йүксәлмишдир.

Даһа гәдим сай системләри бир гайда олараг аддитив принсип (чәм принсипи) әсасында гурулмушдур, йә'ни ваһиди ишарә эдән рәгәми тәкрар этмәклә һәр бир сонракы рәгәм ишарә эдилмишдир. Мәсәлән, әлдә эдилмиш даш лөвһәләрдән мә'лум олмушдур ки, Халдейләр 1, 2, 3, 4, 5 рәгәмләрини

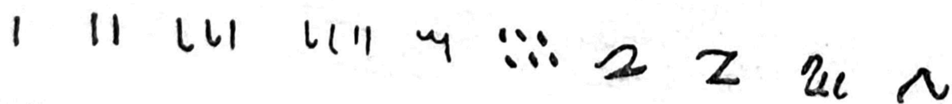
шәклиндә ишарә эдирмишләр. Нисбәтән бөйүк сай лазым олмадығындан онлары ишарә эдән рәгәмләр олмамышдыр. Эләчә дә Рома рәгәмләри аддитив принсип әсасында гурулмушдур. Мәсәлән, CXVIII рәгәми „йүз+он+беш+бир+бир+бир" әдәдини ишарә эдир. XIX исә XX—I демәкдир.

Чинлиләрин илк рәгәмләринә аид әлдә кифайәт гәдәр мә'лумат йохдур. Лакин һәмишә Чин рәгәмләринин шәкилләринин дәйишилдийи мә'лумдур. Бә'зи гәдим Чин китабларында бирдән доггуза гәдәр рәгәмләрә



шәклиндә тәсадүф эдилмишдир. Бурада вертикал хәтләрин һәр бири бир ваһиди үстдән чәкилән һоризонтал хәтт исә беш ваһиди көстәрир.

Мисирлиләр дә бирдән доггуза кими әдәдләри белә язмышлар:



Юнанлар исә илк дөврләрдә бир нечә әдәди бармаға охшар вертикал хәтләрлә көстәрмишләр.

Лакин юнан мәдәнийиәтинин инкишафындан сонра һәмин үсул дәйишдирилиб һәрфләр рәгәм еринә ишләдилмәйә башланмышдыр. Мәсәлән, онлар Г (көһнә П) пинет (йә'ни беш) сөзүнүн баш һәрфи, Δ (делта) дека (йә'ни он) сөзүнүн баш һәрфи, Н исә һекта (йә'ни йүз) сөзүнүн баш һәрфини 5, 10, 100-үн әвәзинә ишләтмишләр. бу үсул эрамыздан ики әср габаг йәһудиләр тәрәфиндән дә ишләдилмишдир.

Тарихән рәгәмләрин язылышынын бөйүк бир тәкамүл дөврү олмушдур. Мисал үчүн һинд рәгәмләрини көтүрәк. Ашағыдакы үч сәтирдә язылан рәгәмләр уйғун олараг эрамыздан

әввәл үчүнчү вә икинчи әсрләрдә вә ерамызын биринчи вә икинчи әсрләриндә ишләдилмишдир:

1 2 4 6 50 50 200 200 200

1 2 4 6 7 9 10 10 10

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Бә'зи тарихчиләрин көстәрдикләринә көрә һинд рәгәмләри вә онлуг сай системи Бағдада VIII әсрдә кечмишдир. Әрәб истиласы заманы (әрәбләрин VIII әсрдә Испанияя һүчуму заманы) һәмин рәгәмләр вә онлуг сай системи Авропа өлкәләринә яйылмышдыр. Әрәбләр һиндлиләрин ишләтдийи рәгәмләри дәйишиксиз гәбул эдәрәк ишләтмәмишләр. Әрәбләр һинд рәгәмләрини тәкмилләшдирмиш, кенишләндирмиш, садәләшдирмиш вә әмәли чәһәтдән даһа элверишли шәклә салмышлар.

Тәдгигатларын көстәрдийинә көрә тарихән сыфыр рәгәми һиндлиләрдә олмамышдыр.

Бу да һиндлиләрин рәгәмләрин мәртәбәләринә фикир вермәдикләрини көстәрир. Сыфыр рәгәмини (0) әрәбләр дахил этмишләр. Әрәбчә сыфыр бош мә'насында ишләдилир. Әрәб китабларыны Авропа дилләринә (латын вә испан дилләринә) тәрчүмә этдикдә „сыфыр" кәлмәси тәрчүмә олунан китаблара „*cifra*" шәклиндә дахил олмуш (Русча „цифры"—сөзү дә бурадан алынмышдыр) вә ики мә'нада ишләдилмишдир. Хүсуси мә'нада *cifra*—сыфры ишарә этмәк үчүн, үмуми мә'нада исә рәгәм мә'насында ишләдилмишдир.

Әрәбләрин онлуг сай системи өзүнүн садәлийинә, файдалы олмасына көрә орта әсрләрдә Авропа өлкәләриндә ишләдилән бир чох сай системләрини мәишәтдән сыхышдырыб чыхартмышдыр. Тәхминән орта әсрин ахырларында авропалылар латын рәгәмләринин мүгабилиндә инди ишләтдийимиз рәгәмләри әрәб рәгәмләри адландырдылар. Әрәб рәгәмләри, бир вә доггуз рәгәминдән башга мин ил әрзиндә хейли дәйишдирилмишдир.

Әсл әрәб рәгәмләри:

Х әсрдә Авропада ишләнән әрәб рәгәмләри:

XV əсрдə Авропада ишлəнəн əрəб рəгəмлəри:	1	Z	3	X	7	6	7	8	9	0
Һазырда ишлəнəн əрəб рəгəмлəри:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

Əсл Рома рəгəмлəри мүбаһисəлидир. Рома рəгəмлəри һаггында ирəли сүрүлəн рə'йлəрдəн һəгигəти ортая чыхартмаг чəтиндир. Лакин ишлəдилəн илк үч рəгəм (I, II, III) бармагларын ишарəси, V рəгəм (беш) əлин ишарəси (баш бармаг бир тəрəфдə, дөрд бармаг исə дикəр тəрəфдə олдугда) вə X ики V-дəн ибарəт олдуғу фикри (яхуд ики əлин чарпаз шəкли) инандырычыдыр.

Инди исə натурал əдəдлəр үзəриндə һесаб əмəллəринин (топлама, чыхма, вурма, бөлмə) мəншəиндəн бəһс эдəк. Һесаб əмəллəри илк дəфə бармаглар васитəсилə эдилмишдир. Илк дөврлəрдə əшя чохлуғуну бирлəшдирмəк, əшя чохлуғундан бир гисм шейлəри айырмаг топлама вə чыхма əмəллəринин əн садə үсулу олмушдур.

Вурма əмəли исə бир нечə дəфə (ики дəфə, үч дəфə вə и. а.) эйни мигдарда көтүрүлəн шейлəрин бирлəшдирилмəси йолу илə əмəлə кəлмишдир.

Бөлмə əмəлинə кəлинчə бу əмəл бир мигдар шейлəри бəрабəр һиссəлəрə (ики һиссəйə, үч һиссəйə вə и. а.) айырмаг йолу илə эдилмишдир. Сай просесиндə олдуғу кими, һесаб əмəллəринин ишлəдилмəсинин илк мəрһəлəлəриндə дə топлама, чыхма, вурма, бөлмə əмəллəринин нəтичəсиндə алынан əдəдин мүчəррəд маһиййəти, һабелə үзəриндə һесаб əмəллəри апарылан шейлəрин тəбиəтиндəн асылы олмамазлыг фикри һəлə ортая чыхмамышды. Ялныз узун бир тарихи инкишаф йолу кечəн бəшəр дүһасы белə бир факты мейдана чыхартды.

Инсанлар бир груп эйни адлы шейлəр үзəриндə бу шейлəрин адындан асылы олмадан һесаб əмəллəри апармаг вəрдишинə йиййəлəндилəр. Мəсəлəн, ики шейи үч шейлə бирлəшдирдикдə бунларын ағач, инсан, гуш вə и. а. олмасындан асылы олмаяраг беш шей эдəчəйи фикри беш əдəдинин мүчəррəд маһиййəтини мейдана чыхартды.

Белəликлə, шейлəрин тəбиəтиндəн асылы олмаяраг онларын бирлəшдирилə вə айрыла билмəси фикри шейлəр үзəриндə апарылан илк һесаб əмəллəринин мүчəррəд маһиййəти демəк иди. Риязи фикир инкишафынын бу мəрһəлəсиндəн башлаяраг əсас һесаб əмəллəринин (топлама, чыхма, вурма, бөлмə) хассəлəри натурал əдəдлəр үзəриндə өйрəнилмəйə башлайыр.

Шейлəрин бирлəшдирилə вə айрыла билмəси хассəлəри өзөзлүйүндə натурал əдəдлəр үзəриндə апарылан əсас əмəллəрин чох айдын көрүнəн, вəрдиш эдилəн бир сыра хассəлəринин мейдана чыхмасына билаваситə көмəк этмишдир. Чəм вə вур-

ма әмәлләринин әсас хассәләри белә хассәләрдәндир (топлананларын ерини дәйишдикдә чәм дәйишмир. Вуругларын ерини дәйишдикдә һасил дәйишмир вә и. а.).

Натурал әдәдләр үзәриндә эдилән һесаб әмәлләринин тә'рифини вермәк үчүн чохлуглар һаггындакы бә'зи анлайышлара мүрачиәт этмәлийик.

Чохлуг анлайышы ән илк анлайышлардандыр. Бир А об'ектинә тә'риф вермәк үчүн ону тәшкил эдән ән бәсит об'ектләри мүәййән этмәк лазымдыр. Сонра бу бәсит об'ектләри әсас гәбул этмәк шәртилә верилмиш об'ектин тә'рифи, бәсит об'ектләр васитәсилә верилмәлидир.

Чохлуг анлайышы ән илк анлайышлардан бири олдуғу үчүн ону даһа бәсит, даһа әзәл олан бир анлайыш васитәсилә ифадә этмәк гейри-мүмкүндүр.

Ибтидаи инсанларын нәзәриндә һәр шейдән габаг әшя чохлуғу, мәсәлән, һейван сүрүсү, гушларын дәстәси вә и. а. чанланмышдыр.

Чохлуғу әмәлә кәтирән шейләрә онун *элементләри* дейилир. Мәсәлән, охудуғумуз бу сәһифәдәки һәрфләр бир чохлугдур. Бурада чохлуғун элементләри һәрфләрдир. Әкәр бу сәһифәдәки сөзләр чохлуғуну нәзәрдән кечирмиш олсаг, башга бир чохлуг әлдә этмиш оларыг. Инди бу ени чохлуғун элементләри сөзләрдир.

Инсан өз әмәли вә зеһни фәалиййәтиндә ики вә я бир нечә чохлуғу мүгайисә этмиш вә бу чохлугларын элементләри арасында мүәййән уйғунлуг ярада билмишдир. Мәсәлән, стол әтрафында дуран бир нечә адамла онларын отурмаг истәдикләри стуллар арасындакы уйғунлуг, һәр бир адама гаршы бир стулун олмасыдыр. Бурада мүмкүндүр ки, һәр бир адама, бир стул вә һәр бир стула бир адам уйғун олар вә белә олдугда адамлар отурдугдан сонра нә стул артыг галар, нә адам. Башга бир һалда адамлар отурдугдан сонра бир стул вә я бир нечә стул артыг гала биләр; я да стул кифайәт этмәдикдә адамлардан бири вә я бир нечәси аяг үстдә галар. Бу уйғунлуғу зеһни дә яратмаг олар. Биринчи һалда дейирик ки, адамларла стулларын сайы бәрабәрдир. Белә олдугда адамлар чохлуғу илә стуллар чохлуғуна *эйни сайлы чохлуг* дейилир. Эйни сайлы чохлуглардан биринчи чохлуғун һәр бир элементинә, икинчи чохлуғун бир элементи вә икинчи чохлуғун һәр бир элементинә биринчи чохлуғун ялныз бир элементи уйғун кәлир. Икинчи вә үчүнчү һалларда исә адамлар чохлуғу илә стуллар чохлуғу эйни сайлы чохлуглар олмаячагдыр. Бу һалда чохлугларын бири, о биринин мүәййән һиссәси илә эйни сайлы олачагдыр. Эйни сайлы олмаян ики чохлугдан биринин элементләринин сайы, о биринин элементләринкиндән чох олачагдыр. Һиссәси илә эйни сайлы олан чохлуғун элементләринин сайы аз, о бири чохлуғунку исә чохдур.

„Бөйүк[1]" сөзүнү риязийятда чохдан бәри > илә ишарә эдирләр (бу ишарәнин тәрәфләри арасындакы мәсафә бөйүк кәмиййәтдән башлаяраг кичийә доғру азалыр). „Кичик" сөзү исә < илә ишарә эдирләр (бу ишарәдә исә тәрәфләр арасындакы мәсафә кичикдән бөйүйә доғру артыр).

Мәсәлән, 15>7 дедикдә биз нәзәрдә тутмалыйыг ки, элементләринин сайы 15 олан чохлуг, элементләринин сайы 7 олан чохлугдан бөйүкдүр. Яхуд китабын бир сәһифәсиндәки һәрфләрин сайыны көстәрән чохлуг бүтүн китабдакы һәрфләрин сайыны көстәрән чохлугдан кичикдир.

Чохлугларын мүгайисәси белә яранмыш, тәшәккүл тапмыш вә мүчәррәдләшмишдир. Инсан тәчрүбәсинин мүәййән инкишаф пилләсиндә, верилмиш бир чохлугла бир нечә ардычыл сөз арасында да гаршылыглы биргиймәтли уйғунлуг яранмышдыр. Сөзләр бунлардыр: биринчи (бир), икинчи (ики), үчүнчү (үч), дөрдүнчү (дөрд), бешинчи (беш) вә и. а.

Һәр шейин мүгабилиндә дейилән бу сөзләр һәмин шейин нөмрәси адландырыла биләр.

Беләликлә, верилмиш чохлуғун элементләринин һәр биринә гаршы онун нөмрәсини гойдугда ики һал ола биләр: 1) мүәййән нөмрәдән сонра чохлуғун нөмрәләнәси элементи галмаз; 2) бу нөмрәләмә сонсуз давам эдәр. Биринчи һалда чохлуғун элементләринин сайы сонлудур вә я *чохлуг сонлудур,* икинчи һалда исә чохлуғун элементләринин сайы сонсуздур вә я *чохлуг сонсуздур.*

Беләликлә, әшя чохлуғун элементләринә гаршы биринчи натурал әдәддән башлаяраг натурал әдәдләр сырасынын элементләрини гойма просесинә *сай просеси* дейилир. Сай просесинин сонунда дейилән натурал әдәдә *чохлуғун элементләри сайы* дейилир. Беләликлә, натурал әдәдләр сырасы верилмиш чохлугла мүгайисә эдилә билән һәр бир чохлуғу әвәз эдир вә эйни заманда натурал әдәдләр сырасы васитәсилә мүгайисә олунан чохлуғун элементләринин сайыны тә'йин эдир. Гәдим заманлардан башлаяраг, бу күнә гәдәр һәятда вә мәишәтдә натурал әдәдләрдән бу мәгсәд үчүн кениш өлчүдә истифадә олунур. Мәсәлән, күчәләрдәки эвләрин нөмрәләнмәси, һәр эвдәки мәнзилләрин нөмрәләнмәси вә и. а. кестәрмәк олар.

Дикәр тәрәфдән чохлуғун элементләринин сайыны тә'йин эдән натурал әдәд, бу чохлуғун элементләринин сайылмасы нөвбәсиндән асылы дейилдир. Мисал үчүн, охудуғумуз бу сәһифәдәки һәрфләрин учдан тутараг бирбаша нөмрәләнмәсиндән вә элӛчә дә сәһифәнин һансы сәтриндән башлаяраг нөмрәләнмәсиндән асылы олмаяраг саһифәдәки бүтүн һәрфләрин сайы дәйишмәйәчәкдир.

---

[1] > вә < ишарәләрини илк дәфә инкилис риязийятчысы Гарриот (1560—1621) „Artis analyticae praxis, est" әсәриндә ишләтмишдир.

Сонлу чохлугларын өзүнә мәхсус бир сыра дахили хассәләри вардыр. Верилмиш ики сонлу чохлуғун һансында елементләрин сайынын чох олмасы суалына чаваб вермәк үчүн я онларын елементләри арасында уйғунлуг вә я һәр ики чохлуг илә натурал әдәдләр сырасы арасында уйғунлуг дүзәлтмәлийик. Мәсәлән, тутаг ки, биринчи чохлуғун елементләри илә 1, 2, 3... ,n, натурал әдәдләри арасында гаршылыглы биргиймәтли уйғунлуг дүзәлдилмишдир, йә'ни биринчи чохлуғун һәр бир елементинә гаршы көстәрилән натурал әдәдләр ичәрисиндә бир әдәд вә тәрсинә һәмин натурал әдәдләрдән һәр биринә гаршы биринчи чохлуғун ялныз бир елементи вардыр.

Һабелә тутаг ки, икинчи чохлуғун елементләри илә 1, 2, $3\cdots m$ натурал әдәдләри арасында гаршылыглы биргиймәтли уйғунлуг дүзәлдилмишдир. Бу һалда әкәр натурал n әдәди m-дән бөйүк оларса, биринчи чохлугдакы елементләрин сайы икинчи чохлугдакы елементләрин сайындан чохдур вә я биринчи икинчидән күчлүдүр дейилир. Әксинә, биринчи чохлуғун елементләринин сайы икинчидән аздырса (йә'ни $n<m$ оларса), онда икинчи чохлуг күчлүдүр.

Әкәр $n=m$ оларса, онда һәр ики чохлуғун күчү эйнидир. Беләликлә, һәмишә ики сонлу чохлуғун күчүнү мүгайисә етмәк үчүн я бу чохлугларын елементләри арасында вә я бу чохлугларла натурал әдәдләр арасында гаршылыглы биргиймәтли уйғунлуг дүзәлтмәк лазымдыр.

Сонсуз чохлугларын күчүнү тә'йин етмәк вә я сонсуз чохлуглары мүгайисә етмәк үчүн эйнилә бу гайдадан истифадә етмәк олар.

Белә бир суал олунур: натурал әдәдләр чохлуғу күчлүдүр, йохса чүт[1] натурал әдәдләр чохлуғу?

Заһирән белә көрүнүр ки, бүтүн натурал әдәдләр чохлуғу чүт әдәдләр чохлуғундан күчлүдүр, чүнки чүт әдәдләр чохлуғу бүтүн натурал әдәдләр чохлуғуна дахилдир.

Әслиндә сонлу чохлуглара хас олан белә бир тәклиф сонсуз чохлуглар үчүн доғру дейилдир. Мәсәлән, тутаг ки, бүтүн натурал әдәдләр чохлуғу

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\cdots,n,\cdots,2n,\cdots \qquad (1)$$

илә бүтүн чүт әдәдләр чохлуғу

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\cdots,2m,\cdots \qquad (2)$$

мүгайисә олунур. (1) чохлуғунун һәр бир елементини икийә вуруб, (2) чохлуғунун елементләрилә мүгайисә едәк.

Онда (1) чохлуғунун 1 елементинә гаршы, (2) чохлуғунун 2 елементи (ялныз 2); (1) чохлуғунун 2 елементинә гаршы,

---

[1] Һәр бир икийә бөлүнән натурал әдәдә *чүт* бөлүнмәйән натурал әдәдә исә *тәк* әдәд дейилир.

(2) чохлуғунун 4 элементи (ялныз 4) вә и. а. (1) чохлуғунун n элементинә гаршы, (2) чохлуғунун $2n$ элементи дурур вә с.

Бләчә дә (2) чохлуғунун һәр бир элементини 2-йә бөлсәк (1) чохлуғунун бүтүн уйғун элементләрини әлдә этмиш оларыг. Беләликлә, (1) чохлуғунун элементләрилә, (2) чохлуғунун элементләри арасында гаршылыглы биргиймәтли уйғунлуг ярадылмыш олур. Демәли, бүтүн натурал әдәдләр чохлуғу илә бүтүн чүт әдәдләр чохлуғу бир күчлүдүр.

Элементи олмаян чохлуға *бош чохлуг* дейилир. Бош чохлуғун элементләринин сайыны сыфыр адландырмағы шәртләшәк. Она көрә дә сыфыр һәр бир натурал әдәддән кичикдир, чүнки бош чохлугдакы элементләрин сайы (элементләр йохдур), бош олмаян (элементли чохлуг) чохлуғун элементләринин сайындан аздыр.

Әкәр B чохлуғу бош чохлугдурса (элементсиз чохлуг) A бош чохлуг дейилдирсә, онда B чохлуғунун элементләри сайы $b=0$, A чохлуғу элементләринин сайы $a>0$ олур.

Чохлугларын элементләри сайыны тә'йин этдикдән вә онларын үзәриндә апарылан әсас әмәлләри натурал әдәдләр үзәринә кечирдикдән сонра натурал әдәдләр үзәриндәки әсас әмәлләрин өйрәнилмәсинә кечә биләрик.

1. Топлама вә чыхма

Топлама. Тугаг ки, элементләри ихтияри тәбиәтә малик олан ики чохлуг верилмишдир. Бунлары A вә B илә көстәрәк. Һәмин чохлугларын элементләри сайыны көстәрән натурал әдәдләри уйғун олараг a вә b илә, бу ики чохлуғун бирләшдирилмәсиндән алынан чохлуғу $A+B$ васитәсилә, бу чохлуғун элементләринин сайыны $a+b$ илә ишарә эдәк. A чохлуғундан онун C һиссәсинин кәнар эдилмәсини $A-C$ илә, ($a-c$ илә исә A-дан онун һиссәси олуб, сайы „с" олан C чохлуғуну кәнар этдикдән сонра галан чохлуғун сайыны ишарә эдәк. Бурада + (плюс)[1] топлама ишарәсидир; — (минус)[2] исә чыхма ишарәсидир. Һәмин ишарәләр XV әсрдә мейдана чыхмыш, XVI әсрдән башлаяраг яйылмышдыр.

Бә'зи риязийят тарихчиләринин яздығына көрә + вә — ишарәләринә илк дәфә Видман Экерин 1489-чу илдә яздығы Арифметка[3] китабында раст кәлмишләр. Бу ишарәләрин үмумиййәтлә гәбул эдилмәси үчүн чох вахт лазым кәлмишдир.

---

[1] + ишарәсинин ады латын сөзү олан plus (плюс) сөзүндән алынмышдыр ки, бу да „чох" (артыг) демәкдир.

[2] — ишарәси исә латын сөзү олан minus (минус) сөзүндән алынмышдыр ки, „аз", „азалтма" демәкдир.

[3] Sohannes Widman von Eger 1489-чу илдә һесаба аид үч һиссәдән ибарәт бир әсәр язмышдыр. Бу әсәрин үчүнчү һиссәсиндә һәндәсәдән бәһс эдилир.

Бирләшдирилән чохлугларын элементләри сайыны көстәрән натурал әдәдләрә (a-я, b-йә) *топлананлар*, бирләшдирилмиш чохлугларын элементләри сайыны көстәрән натурал әдәдә ($a+b$-йә) исә бу *топлананларын чәми* дейилир.

Верилмиш топлананлара көрә онларын чәминин тапылмасына *топлама әмәли* дейилир.

Айдындыр ки, чәм әмәлини бу гайда илә тә'риф этдикдән сонра ялныз ики топлананын дейил, үч, дөрд, беш вә с. бир нечә топлананларын да чәмини тапмаг олар. Чәми, садәчә верилән чохлугларын элементләрини саймагла да тапмаг олар. Лакин чох вахт элә чохлугларын чәмини тапмаг лазым кәлир ки, бу чохлуглардан бири, бир нечәси вә я һеч бири сай просесиндә билаваситә иштирак этмәйәрәк, долайы йолла фикирдә мә'лум олур.

Тутаг ки, бир ери шумламаг үчүн нечә адам лазым олдуғуну тапмаг истәйирик. Бунун үчүн адамлары бир сырая топлайыб, сонра саймаг әлверишли вә бә'зән мүмкүн олмур.

Белә олдугда адамларын еринә чубуглар вә я торпаг үзәриндә чәкилән изләри көтүрмәк олар вә бунунла да ери шумламаг үчүн нечә адам лазым кәлдийини мүәййән этмәк олар.

Топлама әмәли ашағыдакы хассәләрә маликдир:

1. Айдындыр ки, $A+B$ вә $B+A$ чохлуглары мүхтәлиф дейил эйни чохлуглардыр. Она көрә дә һәмин чохлугларын элементләринин сайы да эйни олмалыдыр. Беләликлә $a+b=$ $=b+a$ олмалыдыр[1], йә'ни **топлананларын ери дәйишдикдә чәм дәйишмәз.** Элә чә дә бир нечә топлананлар үчүн һәмин хассәләрин доғрулуғуну көстәрмәк олар. Чәмин бу хассәсинә *ердәйишмә* вә я *коммутативлик* хассәси дейилир.

2. Тутаг ки, үч ихтияри A, B, C сонлу чохлуглары верилмишдир. Бу үч чохлуғу мүхтәлиф гайда илә бирләшдирмәк олар: A-ны B илә бирләшдириб, алынан чохлуғу C илә; вә я B-ни C илә бирләшдириб, алынан чохлуғу A илә бирләшдирмәк олар (даһа башга йолла да бирләшдирмәк олар). Чохлуглары бирләшдирмә гайдасыны бир-бириндән айырд этмәк үчүн мө'тәризә ишарәсиндән истифадә этмәк олар. Бу ишарә XVII әсрдән башлаяраг ишләдилмәкдәдир. Мәсәлән, бу бирләшдирмәни $(A+B)+C$ шәклиндә яздыгда, әввәлчә A илә B-нин бирләшдирилдийи (топландығы) сонра исә алынан чәм илә C-нин бирләшдирилмәси дүшүнүлмәлидир.

$A+(B+C)$ шәклиндә яздыгда исә әввәлчә B илә C-нин бирләшдирилдийи (топландығы), сонра исә A-нын үзәринә бу чохлуғун әлавә олундуғу дүшүнүлмәлидир.

---

[1] Бурада $=$ ишарәси бәрабәрлик ишарәси олуб XVI әсрдән э'тибарән $+$ вә $-$ ишарәләриндән сонра ишләнмишдир. Илк дәфә һәмин ишарә инкилис һәндәсәчиси Рекорд (Record) тәрәфиндән „Artis of wit" (Әглин дирәйи) китабында ишләдилмишдир.

Бу ики чохлуғун сайынын бәрабәр олдуғуну чох асанлыгла йәгин этмәк олар. Бу чохлугларын элементләри сайынын $(a+b)+c$ вә $a+(b+c)$ илә ифадә олуначағы айдындыр. Демәли,

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

олмалыдыр.

Натурал әдәдләрин бу хассәсинә *груплашдырма* вә я *ассасиативлик* хассәси дейилир.

3. Инди һәр һансы A чохлуғуну бош чохлугла бирләшдирәк. A чохлуғунун элементләри сайыны a, бош чохлуғун элементләри сайыны 0 (сыфыр) илә көстәрәк. Онда топламанын тә'рифинә көрә $a+0=a$ олар, чүнки A чохлуғуну бош чохлугла бирләшдирсәк A чохлуғунун элементләри үзәринә һеч бир элемент әлавә олунмаз.

Чыхма. Инди чыхма әмәлинин хассәләрини өйрәнәк.

Биз юхарыда чыхма әмәлини, верилмиш чохлугдан онун бир һиссәсинин кәнар эдилмәси кими гейд этдик. Мәсәлән, әрик ағачындан дәймиш әрикләр дәриләрсә, ағачдакы әрикләр чохлуғундан дәймиш әрикләр кәнар эдилмиш олар, йә'ни, әрик ағачындакы әрикләр чохлуғунун бир һиссәси кәнар эдилмиш олур. Белә бир мәсәлә мейдана чыхыр: чохлуғун элементләри вә бу чохлуғун кәнар эдилән һиссәсиндәки элементләрин сайыны билдикдә галыг чохлуғун элементләри сайыны тапмалы.

Айдындыр ки, галыг чохлуғун элементләрини садәчә саймагла тапмаг олар. Мәсәлән, әрик ағачында беш йүз әрик вардырса, онун үч йүзү дәрилдикдән сонра ики йүз әрик галачағыны садәчә йәгин этмәк олар.

Лакин галыг чохлуғу саймаг чох вахт имкан харичиндә олур. Она көрә дә саймараг галыг чохлуғун элементләринин сайыны тә'йин этмәйи бачармаг лазымдыр.

1. Әкәр A чохлуғундан онун бүтүн элементләри кәнар эдиләрсә, мәсәлән, ағачдакы бүтүн әрикләр дәриләрсә, $A-A$ галыг чохлуғу бош чохлугдан ибарәт олачагдыр (ағачда әрик галмаячагдыр). Тутаг ки, A чохлуғунун элементләринин сайы a, онун һиссәси олан B чохлуғунун элементләринин сайы b-дир. A чохлуғундан B чохлуғуну айырдыгдан сонра онун галан элементләринин сайына натурал a вә b әдәдләринин *фәрги* дейилир вә бу да $a-b$ шәклиндә ишарә эдилир.

Фәргин тапылмасы әмәлинә *чыхма әмәли* дейилир.

$a-a=0$, $a-0=a$ вә $0-0=0$ олдуғу айдындыр. Бурада чыхма әмәлинин мүмкүн олмасы үчүн һәмишә чыхылан (b), азаландан (a) кичик олмалыдыр.

Инди чыхма әмәли илә топлама әмәли арасындакы әлагәни көстәрәк.

2. Әкәр A чохлуғундан онун һиссәси олан B-ни кәнар эдириксә, кәнар эдилән чохлуғу енидән галыг чохлугла бирләшдирсәк A чохлуғу алыныр, чүнки, бу һалда A чохлуғу үзәринә

кәнардан элемент әлавә олунмур, кәнар эдилән элементләр исә енидән A—чохлуғуна гайтарылыр. Она көрә дә

$$(a-b)+b=a$$

олур. Бурадан көрүнүр ки, чыхма әмәли топлама әмәлинин тәрсидир. Доғрудан да $a-b$ илә b -нин топланмасы a-дан, b-нин чыхылмасы әмәлини йох эдиб a-ны бәрпа эдир вә я a әдәдинин үзәринә d әдәди кәлсәк, сонра исә алынан әдәддән d-ни чыхсаг енә дә a әдәдини аларыг:

$$a+d-d=a.$$

Демәли, топлама әмәли дә чыхма әмәлинин тәрсидир. Бир сөзлә топлама вә чыхма әмәлләри гаршылыглы тәрс әмәлләрдир. Беләликлә, чыхма әмәли, топлананлардан бири вә чәм мә'лум олдугда дикәр топлананы тапмаг әмәлиндән ибарәтдир. Бурада чәмә—*азалан*; мә'лум топланана—*чыхылан*, ахтарылан топланана исә *фәрг* дейилир.

3. Бә'зән верилмиш A чохлуғундан онун бир B һиссәсиндән әлавә башга бир C һиссәсинин дә кәнар эдилмәси лазым кәлир. Мәсәлән, мин әрийи олан ағачдан әввәлчә үч йүз әрик, сонра даһа ики йүз әрик дәрилмишдир.

Бу мәсәләни ики чүр һәлл этмәк олар:

Әввәлчә A чохлуғундан онун һиссәси олан B-ни чыхмаг, алынан галыг чохлугдан енидән C-ни чыхмаг олар. Бу әмәли $(A-B)-C$ шәклиндә яза биләрик. Бундан башга B чохлуғуну C—чохлуғу илә бирләшдириб A-дан кәнар этмәк олар.

Бу әмәли исә ардычыл олараг

$$A-(B+C)$$

шәклиндә язмаг олар. Һәмин чохлугларын элементләри сайына кечсәк, биринчи һалда

$$(a-b)-c,$$

икинчи һалда исә

$$a-(b+c)$$

натурал әдәдләрини әлдә эдирик.

Белә мәсәләләри һәлл этмәк үчүн кәрәк B вә C чохлуглары бирликдә A-нын һиссәси олмалыдыр. Һәр ики үсулда A-дан эйни сайда элемент кәнар эдилдийинә көрә

$$(a-b)-c=a-(b+c)$$

олмалыдыр, йә'ни, чәми чыхмаг әвәзинә, айры-айры топлананлары чыхмаг вә тәрсинә, айры-айры топлананлары чыхмаг әвәзинә онларын чәмини чыхмаг кифайәтдир. Беләчә дә ағачдакы мин әрикдән әввәлчә үч йүз, сонра ики йүз әрик дәрсәк, вә я бир дәфәлик ағачдан беш йүз әрик дәрсәк, ағачда беш йүз әрик галачағыны садәчә саймагла йәгин этмәк олар.

4. Инди исә чәмдән чыхмаг мәсәләсини нәзәрдән кечирәк. Тутаг ки, гызыл күл ағачында биринчи күн он гөнчә вардыр. Сәһәри исә даһа беш гөнчә ачылмышдыр. Сонра үч гөнчә

дәрилмишдир. Айдындыр ки, үч гызыл күл әввәлчә ачылмыш 10 гызыл күлдән, я сонра ачылмыш беш гызыл күл ичәрисиндән дәрилә биләр вә я фәргинә вармадан ағачда олан бүтүн ачылмыш гызыл күлләр ичәрисиндән (ағачда он беш гызыл күл ачылмышдыр) үчүнү дәрмәк олар. Бу дедикләримизи үмумиләшдирсәк белә гейд этмәк олар. A вә B чохлуглары бирләшдирилдикдән (бир ерә топладыгдан) сонра алынан чохлугдан A-нын вә B-нин һиссәси ола билән бир C чохлуғуну ашағыдакы үч гайда илә кәнар этмәк олар:

1. $A + (B - C)$
2. $(A - C) + B$
3. $A + (B - C)$

Айдындыр ки, бурада һәр үч һалда ердә A вә B чохлугларынын, C-йә дахил олан элементләриндән башга элементләри галачагдыр. Она көрә дә әкәр A, B, C чохлугларынын элементләри сайы уйғун олараг a, b, c, оларса онда:

$$(a+b)-c=(a-c)+b=a+(b-c)$$

алыначагдыр.

Әләчә дә гызыл күл ағачындан күл дәрилдикдә ағачда галан гызыл күлүн сайы үч һалда бәрабәр олачагдыр.

5) Тутаг ки, A чохлуғундан C чохлуғу кәнар эдилмиш B чохлуғунун (C чохлуғу B-нин һиссәсидир) элементләринин кәнар эдилмәси арзу олунур. Айдындыр ки, C чохлуғу кәнар эдилмиш B чохлуғунун элементләри $(B-C)$ чохлуғунун элементләриндән ибарәтдир. Онда A чохлуғундан C чохлуғу кәнар эдилмиш B чохлуғунун элементләрини кәнар этсәк

$$A-(B-C)$$

чохлуғуну әлдә эдирик.

Бу иши башга ҹүр дә этмәк олар. Әввәлчә A чохлуғундан B-нин бүтүн элементләрини кәнар эдиб, алынан чохлуғу C чохлуғу илә бирләшдирә биләрик. Айдындыр ки, һәр ики һалда A чохлуғундан B-нин эйни элементләрини кәнар этмиш оларыг. Галыг чохлуглар һәр ики һалда эйни элементләрдән ибарәт олар. Она көрә дә әкәр A чохлуғунун элементләринин сайы a, B-нинки b вә C-нинки c оларса, онда

$$a-(b-c)=(a-b)+c$$

олар.

2. Вурма вә бөлмә

Вурма. Сайлары эйни олан ики вә бир нечә чохлуғу нәзәрдән кечирәк. Тутаг ки, бир хиябанда һәр сырада он беш ағач олмагла үч сыра ағач әкилмишдир. Демәли, бурада һәрәсиндә он беш элемент олан үч чохлуг верилмишдир. Бу чохлуглары бирләшдирсәк ени чохлуг әлдә этмиш оларыг. Ени чохлуғун нечә элементи олачағыны тапмаг тәләб олунур.

Ашкардыр ки, ени чохлуғун элементләринин сайы

$$15+15+15$$

олачагдыр.

Чох вахт элементләринин сайы бәрабәр олан үч чохлуг дейил, даһа чох сайда чохлуғу бирләшдирмәк тәләб олунур. Бу һалда ени чохлуғун элементләри сайыны ҹәм ишарәси васитәсилә узун-узады язмаг лазым кәлдийиндән дикәр ишарә, йә'ни вурма ишарәси ишләдилир.

Вурма ишарәси (·) нөгтә вә я (x)[1] шәклиндә язылыр. Нөгтә шәклиндә вурма ишарәси XVII әсрдә мейдана чыхмыш, лакин бунун ишләдилмәсиндә узун заман тәрәддүд көстәрилмишдир.

Демәли, $15+15+15=15\cdot3$ (вә я 15×3) шәклиндә язылмалыдыр.

Беләликлә, вурма әмәли бәрабәр топлананларын ҹәминдән ибарәтдир. Бу һалда, тәкрар эдән топланана *вурулан*, топлананларын сайына исә *вуран* дейилир. Вурулан вә вурана бирликдә *вуруглар* да дейилир. Вурмадан сонра әлдә эдилән әдәдә исә *һасил* дейилир. Демәли, мә'лум вуруглара көрә һасилин тапылмасына *вурма әмәли* дейилир.

Вурма әмәлинин дә бир сыра мүһүм хассәләри вардыр. Бу хассәләр ашағыдакылардыр:

Һәр ҹәркәдә а шитил

в ҹәркә

1-чи шәкил

1) Вуругларын ери дәйишдикдә һасил дәйишмәз.

Тутаг ки, a вә b ихтияри ики натурал әдәддир. a-ны, b-йә вурмаг a-ны b дәфә өз-өзү илә топламаг демәкдир. Тутаг ки, бир ләкдә һәр бириндә a гәдәр шитил олан b ҹәркә шитил әкилмишдир (1-чи шәкил).

---

[1] Вурма ишарәси (·) шәклиндә XVII әсрин икинчи ярсында Лейбнис тәрәфиндән ишләдилмишдир.

Вурма әмәлинин X ишарәси исә (Oughtred) Оутретин риязийят китабында ишләдилмишдир.

Айдындыр ки, ләкдә әкилән бүтүн шитилләрин сайы $a \cdot b$ олаҹагдыр. Штилләрин сайыны белә һесабладыгда ҹәркәләри һоризонтал золаглар үзрә һесабладыг (b ҹәркә) вә һәр ҹәркәдә a гәдәр шитил олдуғуну нәзәрә алдыг. Инди исә вертикал золаглары ҹәркә һесаб эдиб (белә ҹәркәләрин сайы a-дыр), һәр ҹәркәдә b шитил олдуғуну нәзәрә алсаг, ләкдә олан шитилләрин сайынын $b \cdot a$ олаҹағыны көрәрик. Демәли,

$$a \cdot b = b \cdot a$$

олмалыдыр; бурада a, b ихтияри натурал әдәдләрдир.

2) Инди исә натурал әдәдләри вурма әмәлинин пайлама ганунуна (дистрибутивлик ганунуна) табе олдуғуну изаһ эдәк.

Тутаг ки, a, b, c ихтияри үч натурал әдәддир. Онда

$$a \cdot (b + c) = ab + ac \qquad (3)$$

олар.

Һәмин бәрабәрлийин доғрулуғуну исбат этмәк үчүн енә дә, a ҹәркә вә һәр ҹәркәдә b вә c гәдәр шитил олдуғуну көтүрәк. Әввәлҹә (3) формулунун сол тәрәфинин доғрулуғуну изаһ эдәк.

2-ҹи шәкилдә көстәрилдийи кими, һәр квадрата бир шитил, һәр шитилә бир квадрат уйғундур. Һәр ҹәркәнин биринҹи

2-ҹи шәкил

һиссәсиндә b гәдәр шитил, икинҹи һиссәсиндә исә c гәдәр шитил вардыр. Ҹәркәләрин бу ики һиссәсини бир-бириндән AB мәрзи айырыр. Әкәр AB мәрзини ләғв этсәк онда һәр сәтирдә $b+c$ шитал олур. Бүтүн ләкдә исә $a(b+c)$ шитил олур.

Инди AB мәрзиндән солда вә сағда нечә шитил олдуғуну тапаг. AB мәркәзинин солунда a ҹәркә, һәр ҹәркәдә исә b гәдәр шитал вардыр. Онда AB мәрзиндә солда $a \cdot b$ гәдәр шитил олаҹаг. AB мәрзинин сағында исә a ҹәркә, һәр ҹәркәдә

исә c гәдәр шитил вардыр. Онда AB мәрзиндән сағда ҹәми $a \cdot c$ гәдәр шитил олачагдыр. AB мәрзини ләғв этдикдә, айдындыр ки, һәр ики һиссәдә $ab+ac$ гәдәр шитил олачагдыр. AB мәрзини ләғв этдикдә кәнардан шитил әлавә олунмадығындан вә шитилләр азалмадығындан

$$a \cdot (b+c) = ab+ac$$

олмалыдыр.

3) Натурал әдәдләри вурма әмәли груплашдырма (ассоциативлик) ганунуна табедир.

Билирик ки, натурал әдәдләри вурма әмәли ердәйишмә ганунуна табедир.

Юхарыда көстәрилән шәкилдә (1-чи шәкил) һәр шитил бир квадратда әкилмиш вә һәр квадратда бир шитил олдуғуну фәрз этмишдик. Демәли, 1-чи шәкилдә бу гайда илә бүтүн квадратларла шитилләр арасында гаршылыглы бир гиймәтли уйғунлуг ярадылмышдыр. Белә олдугда һәр ҹәркәдә a квадрат, b ҹәркәдә исә $a \cdot b$ квадрат олачагдыр.

Тутаг ки, инди һәр квадратда c гәдәр шитил вардыр, онда бир ҹәркәдә $a \cdot c$ шитал, b ҹәркәдә исә $(a \cdot c) \cdot b$ шитил олачагдыр. Һәмин шитилләрин сайыны дикәр тәрәфдән дә белә һесаблая биләрик.

Шәртә көрә һәр квадрата c шитил санҹылмышдыр. Әкәр һәр ҹәркәдә a шитил олмагла, һәр квадратда бир шитил санҹылса иди, онда әлавә $(c \cdot b)$ ҹәркә лазым кәләрди.

Демәли һәр ҹәркәдә a гәдәр шитил олдуғундан бүтүн шитилләрин сайы $a \cdot (c \cdot b)$ олмалыдыр. Кәнардан һеч бир шитил әлавә эдилмәдийиндән вә санҹылан шитилләрин һеч бири атылмадығындан һәр ики гайда илә һесабланан шитилләрин сайы бәрабәр олмалыдыр, йә'ни:

$$(a \cdot c) \cdot b = a \cdot (c \cdot b).$$

Юхарыда вурма әмәлинин тә'рифини вердикдә дедик ки, вурма әмәли, элементләринин сайы бәрабәр олан чохлугларын ҹәминдән ибарәтдир. Мисал үчүн: $25 \cdot 3 = 25+25+25$, $25 \cdot 2 = 25+25$ вә и. а.

Демәли верилмиш a натурал әдәдини b натурал әдәдинә вурмаг a-ны b дәфә өз-өзү илә топламаг демәкдир. Вураны бир ваһид азалтдыгда һасил дә вурулан гәдәр азалыр.

Бурада $b=1$ олан һал мүстәснадыр, чүнки a-ны бир дәфә тәкрар эдәрәк өзү илә топламаг мүмкүн дейилдир. Она көрә дә $a \cdot 1 = a$ гәбул эдилмәлидир.

Сыфры мүәййән натурал әдәдә вурмаг, сыфры һәмин натурал әдәд дәфә өз-өзү илә топламаг демәк олдуғундан:

$$0 \cdot a = \underbrace{0+0+0+\ldots+0}_{a \text{ дәфә}} = 0$$

олмалыдыр.

Инди исә мүәййән a әдәдинин сыфра вурулмасы гайдасындан бәһс эдәк. Асанлыгла

$$a\cdot(b-c)=ab-ac$$

олдуғуну йәгин эдә биләрик. Бурада b-нин c-дән бөйүк олдуғу фәрз эдилир.

$$b=c+1 \text{ олдугда}$$
$$a\cdot 1=a \text{ алыныр.}$$

Инди $b=c$ фәрз эдиб $a\cdot(b-b)=a\cdot 0=0$ олдуғуну гәбул эдәк.

Беләликлә, натурал әдәдләри вурма әмәлинин тә'рифини вердикдә, һәмин тә'рифә һәр бир натурал әдәдин ваһидә вә сыфра вурулмасы тә'рифини дә әлавә этмәлийик.

Ваһидә вә сыфыра вурманы белә тә'риф этдикдә вурманын табе олдуғу бүтүн хассәләрин өдәнилдийини йохламаг чәтин дейилдир:

1. $a\cdot 1=1\cdot a=a$
2. $a\cdot(b\cdot 1)=(a\cdot b)\cdot 1=a\cdot b$
3. $(a+b)\cdot 1=a\cdot 1+b\cdot 1=a+b$

Әләчә дә сыфыра вурдугда һәмин хассәләр өдәнилир:

1. $a\cdot 0=0\cdot a=0$
2. $a\cdot(b\cdot 0)=(a\cdot b)\cdot 0=0$
3. $(b+c)\cdot 0=b\cdot 0+c\cdot 0=0+0=0$

Биз натурал әдәдләр үзәриндә эдилән әмәлләрин табе олдуғу бир ганунун бүтүн натурал әдәдләрә хас олдуғуну нүмайиш этдирмәк мәгсәдилә айры-айры натурал әдәдләрдән дейил (мәсәлән 3, 5, 9 вә с.) ихтияри көтүрүлә билән натурал әдәдләрдән истифадә этдик. Белә натурал әдәдләри a, b, c вә и. а. кими һәрфләрлә көстәрдик. Бу гайда илә янашараг, сыфыр да дахил олмагла, бүтүн натурал әдәдләрин үзәриндә эдилән топлама вә вурма әмәлләринин ашағыдакы хассәләрә малик олдуғуну сүбут этдик:

1. $a+b=b+a$
2. $a\cdot b=b\cdot a$
3. $(a+b)+c=a+(b+c)$
4. $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$
5. $a\cdot(b+c)=ab+ac$.

Бөлмә. Инди исә натурал әдәдләрин үзәриндә апарылан бөлмә әмәлиндән бәһс эдәк. Бөлмә әмәлинин мәншәи тарихи чох гәдимдир. Натурал әдәдләр үзәриндә эдилән вурма әмәлилә янашы мүәййән бир әшя чохлуғуну бир нечә бәрабәр һиссәйә айыра билмәк кими мәсәләләрин һәлли дә чох гәдим заманларда лазым олмушдур. Әввәлләрдә бир йығын әшяны ики вә я үч бәрабәр һиссәйә айырмаг үчүн һәмин әшяны бир-бир айырыб, айры-айры ики вә я үч ерә йығырдылар. Беләликлә, верилмиш әшя чохлуғуну ики вә я үч бәрабәр һис-

сәйә айырыб һиссәләрдән һәр бирини сайырдылар. Элә бу заман чохлуғун ики бәрабәр һиссәйә айрылмадығы һалларына тәсадүф эдилмиш вә белә мәсәләләр һәлл эдилмәмиш галмышдыр. Верилмиш чохлуғун элементләри сайыны вә онун нечә бәрабәр һиссәйә айрылачағыны биләрәк һәр һиссәнин элементләри сайыны тә'йин этмәк кими мәсәлә бөлмә әмәлинә аид бир мәсәләдир. Лакин бөлмә әмәлинә аид белә бир мәсәлә дә нәзәри чәлб этмишдир.

Верилмиш чохлуғун элементләри сайыны вә онун айрылдығы бәрабәр һиссәләрдәки элементләрин сайыны биләрәк, һәмин бәрабәр һиссәләрин элементләри сайыны тә'йин этмәк. Бөлмә әмәлинә аид бу ики мәсәләни изаһ эдәк.

Тутаг ки, 12 шитили һәр чәркәдә бәрабәр мигдарда шитил олмагла үч чәркәдә санчмаг лазымдыр. Әввәлләрдә бу кими мәсәләни белә һәлл эдирдиләр: 12 шитилдән һәр чәркәйә бир шитил санчырдылар. 12 шитил гуртардыгдан сонра һәр чәркәдәки шитили сайырдылар.

Инди тутаг ки, 12 шитил вардыр. Бу шитилләри һәр чәркәдә дөрд шитил олмагла нечә чәркәдә әкмәк олар? Бу мәсәләни исә белә һәлл эдирдиләр.

Әввәлчә 12 шитили дөрд-дөрд айырырдылар. Сонра һәр бириндә дөрд шитил олан нечә һиссә алындығыны саяраг үч чәркә лазым олдуғуну мүәййән эдирдиләр.

Бу ики мәсәләни вурма әмәлинин көмәйи илә бир мәсәләйә кәтирмәк олар. Биринчи мәсәләдә 12 шитилин үч чәркәдә санчылмасы тәләб эдилирди. Һәр чәркәдә нечә шитил олачағы сорушулур вә һәр чәркәдә дөрд шитил олачағы тә'йин эдилирди. Демәли, $4 \cdot 3 = 12$ олмалыдыр. Икинчи мәсәләдә исә һәр бириндә дөрд шитил олмагла 12 шитилин нечә чәркәйә әкилә биләчәйи сорушулур вә үч чәркә лазым олдуғу мүәййән эдилирди. Демәли $4 \cdot 3 = 12$ олмалыдыр.

Биринчи мәсәләдә һасил (12) вә вуран (3) мә'лум икән вурулан (4) тапылырды. Икинчи мәсәләдә исә һасил (12) вә вурулан (4) мә'лум икән вуран (3) тапылырды. Беләликлә, һәр ики мәсәләдә һасил вә вуруглардан бири мә'лум икән икинчи вуруг ахтарылырды.

Она көрә дә юхарыдакы ики мәсәләни бир бөлмә мәсәләсинә кәтирә биләрик: һасил вә вуруглардан бири мә'лум икән икинчи вуруғу тапмалы. Мә'лум бир әдәди дикәр мә'лум бир әдәдә бөлмәк, элә үчүнчү бир әдәд тапмаг демәкдир ки, бу үчүнчү әдәди мә'лум икинчи әдәдә вурдугда мә'лум биринчи әдәд алынсын. Бурада биринчи мә'лум әдәдә *бөлүнән*, икинчи мә'лум әдәдә *бөлән*; ахтарылан әдәдә исә *гисмәт* дейилир. Гисмәтин тапылмасы әмәлинә *бөлмә әмәли* дейилир. Бөлмә әмәли ики нөгтә илә ишарә эдилир вә үмумиййәтлә, белә язылыр:

$$a : b = c.$$

Биринчи мәсәләдә бөлмә белә язылмалыдыр:

$$12:3=4.$$

Бөлмә ишарәси (:) XVII әсрдә[1] мейдана чыхмыш вә сонралар даимиләшмишдир.

Бөлмә әмәли вурма әмәлинин тәрсидир. Ики әдәди әввәлчә бир-биринә вуруб, сонра онларын һасилини вуруглардан биринә бөлсәк, о бири вуруг алынар.

Бурадан көрүнүр ки, вурма әмәлиндә вуран вә вурулан мә'лум олдуғу һалда һасил ахтарылыр. Бөлмә әмәлиндә исә һасил вә вуруглардан бири мә'лум икән о бири вуруг тапылыр. Вурма әмәли дә бөлмә әмәлинин тәрсидир. Гисмәти бөләнә вурдугда бөлүнән алыныр. Она көрә дә вурма вә бөлмә әмәлләри гаршылыглы тәрс әмәлләрдир.

Бөлмә әмәлиндә вурмая аид олмаян бә'зи хүсусиййәтләр вардыр:

1) һәр бир натурал әдәд 1-ә бөлүнүр, гисмәт исә бу әдәдин өзүнә барабәр олур; $a:1=a$, чүнки $a\cdot 1=a$-дыр.

2) натурал әдәдләр сырасына сыфры да дахил этсәк, сыфрын ихтияри натурал әдәдә бөлүндүйүнү һөкм едә биләрик:

$$0:a=0, \text{ чүнки } a\cdot 0=0.$$

Лакин һеч бир натурал әдәд сыфра бөлүнмүр.

Әкәр $a:0=b$ олса иди, онда $0\cdot b=a$ олмалы иди. Бу исә мүмкүн дейилдир, чүнки $0\cdot b=0$.

3) $(a+b):c=a:c+b:c$

Бу хассәнин доғрулуғуну исбат едәк. Тутаг ки,

$$(a+b):c=d$$

онда

$$a+b=c\cdot d$$

олмалыдыр. Фәрз едәк ки:

$$a:c=d_1 \qquad b:c=d_2.$$

Онда

$$a=c\cdot d_1. \qquad b=c\cdot d_2$$

олачагдыр. Бурадан

$$a+b=cd_1+cd_2=c(d_1+d_2)$$

алынар. Демәли,

$$c\cdot d=c(d_1+d_2)$$

вә я

$$d=d_1+d_2=a:c+b:c$$

олмалыдыр. Йә'ни,

$$(a+b):c=a:c+b:c.$$

Әләчә дә,

$$(a-b):c=a:c-b:c$$

олдуғуну йәгин едә биләрик.

---

[1] (:) ишарәси илк дәфә XVII әсрдә инкилисләр тәрәфиндән ишләдилмишдир. Эһтимал ки, Лейбинс бу ишарәни ишләдәркән (1684) инкилис мәнбәләриндән көтүрмүшдүр.

3. Сай системләри

Әдәдләрин дүзкүн, биргиймәтли охунмасы вә язылмасы кими мәсәләләр дә гәдим мәсәләләрдән биридир. Әкәр һәр бир әдәдә Халдейләрдә вә башга гәдим халгларда олдуғу кими айрыча ад верилсә вә язылса иди онлары ядда сахламаг вә язмаг имкан харичиндә оләрды. Һинд позисион[1] системинин яранмасы әдәдләр һаггындакы фикир инкишафынын ән парлаг гәләбәләриндән биридир. Бу системдә әсас мәгсәд һәр бир натурал әдәди он рәгәм:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 васитәсилә ифадә этмәкдир.

Ихтияри натурал әдәди язмаг вә охумаг үчүн истифадә эдилән ад вә рәгәмләр күллүсүнә *нөмрәләмә* дейилир.

Бәс он рәгәм васитәсилә ихтияри натурал әдәди язмаг нечә мүмкүн олмушдур?

Бир нечә шейи саймаг лазым кәлдикдә илк заманларда онлары он-он топалара айырмышлар. Мүмкүндүр ки, һәрәсиндә он шей олан бир нечә топадан сонра ердә бир онлуг әмәлә кәтирмәйән бир нечә шей галсын. Әкәр айрылан шейләр ичәрисиндә дөрд дәнә онлуг топа вә әлавә үч шей вардырса, бу шейләрин үч ваһид вә дөрд онлугдан ибарәт олдуғуну һөкм эдирдиләр. Әкәр онлуг топаларынын сайы чох олмуш олсайды, шейләри һәрәсиндә йүз дәнә олмагла топалара айырырдылар. Бу һалда бир топада йүздән аз шей галдыгда һәмин топаны һәр бириндә енидән он шей олмагла кичик топлара айырмаг лазым кәлирди. Бу исә олдуғу кими әввәлдәки гайда илә эдиләрди. Ашкардыр ки, бу гайданы давам этмәк олар. Муасир дилдә һәмин просеси беләкөстәрә биләрик.

Тутаг ки, мүәййән чохлуғу юхарыдакы гайда илә айырдыгда a_1 тәклик, a_2 онлуг, a_3 йүзлүк, a_4 минлик вә и. а. вардыр.

Онда һәмин чохлуғу N илә ишарә этсәк:

$$N=a_1+a_2\cdot 10+a_3\cdot 10^2+a_4\cdot 10^3+\ldots+a_n\cdot 10^{n-1} \qquad (4)$$

аларыг. Бу әдәди белә язмағы шәртләшәк:

$$N=a_n\ldots\ldots a_4\ a_3\ a_2\ a_1. \qquad (5)$$

Мәсәлән, сайыласы шейләр дөрд онлугдан, үч тәкликдән ибарәт олмуш олсайды онда $a_1=3$, $a_2=4$ оларды вә һәмин шейләрин сайыны $a_2\ a_1$ вә я 43 кими язардыг. Бурада тәкликләрин сайына (a_1) биринчи мәртәбә ваһидләри, онлугларын сайына (a_2) икинчи мәртәбә ваһидләри, йүзлүкләрин сайына (a_3) үчүнчү мәртәбә ваһидләри вә и. а. дейилир.

Ики ян-яна язылан рәгәмләрдән солдакы, сағдакындан он дәфә бөйүк ваһидләри ифадә эдир. Беләликлә нәинки языл-

---

[1] Positio (позисио) латынча позиси, „мөвге" „ер", вәзийјәт демәкдир.

мыш рәгәмин өзүнүн эйни заманда онун язылдығы мөвгеинин дә әһәмиййәти вардыр. Она көрә дә һәмин системә *„мөвге“ системи* дейилир. Онлуг системиндә он әдәди хүсуси әһәмиййәтә малик олуб, она системин *„әсасы“* дейилир. Бу сай системинин заһири садәлийинә бахмаяраг узун бир тарихи инкишафын мәһсулудур. Онун яранмасы вә инкишафында бир чох халглар биркә сә'й вә ярадычылыгларыны әсиркәмәмишләр.

Тәбии олараг белә бир суал мейдана чыхыр, нә үчүн сай системиндә он әдәди әсас көтүрүлмүшдүр?

Белә күман эдилир ки, сай просесиндә әл бармагларындан истифадә олундуғундан ики әлимиздәки он бармаг сай системинин әсасы дейә гәбул эдилмишдир. Лакин бир сыра халгларда беш-беш, ийирми-ийирми сай сөзләринә раст кәлмәк олар. Мәсәлән, франсызча 80, *„guatr—vint“*—4 × 20 (дөрд ийирми) демәкдир. Он ики—он ики (Дүжин). Алтмыш-алтмыш. Һәтта он бир-он бир (Ени Зеландия) сай системинә дә раст кәлмәк олур.

Бу көстәрир ки, мүхтәлиф халгларда сай системинин әсасында ялныз 10 дейил, башга сайлар да көтүрүлмүшдүр.

Игтисади мүнасибәтләрдә вә мүһарибәләрдә, халглар бир-биринә әдәдләрин ишарә вә я дейилиш гайдасыны яймыш вә нәтичәдә даһа мүнасиб сөзләр сечилмишдир. Бу фикри изаһ этмәк үчүн мүхтәлиф халгларда эйни сай адларынын олмасы бир халгдан дикәр халга мүнасиб сай адынын кечмәси фикринә мисал ола биләр. Мәсәлән, два (русча), ду (фарсча) *dva* (санскритчә)[1], био (юнанча), *duo* (латынча), *two* (инкилисчә) вә и. а. көстәрмәк олар. Эләчә дә онлуг сай системи бир чох халглар арасында мүштәрәк сай системи гәбул эдилмиш вә мүһафизә олунмушдур. Позисион онлуг сай системи тәгрибән 2 мин ил бундан әввәл һиндлиләрә мә'лум иди. Авропая бу системи әрәбләр яймышлар (Эрамызын VIII әсриндә Испанияя һүчум этдикдә). Эләчә дә VIII әсрдә әрәб рәгәмләри Бағдада кечмишдир. О вахт әрәбләрин сай системи бүтүн Авропая яйылмыш олду.

Сай системләринин мүхтәлиф ола биләчәйи фикринә кәлиб чыхмаг чох да чәтин олмамышдыр. Сай системләринин мүхтәлифлийи дейилдикдә һесабламанын әсасыны тәшкил эдән әдәдин мүхтәлифлийи дүшүнүлмәлидир. Юхарыда тарихән әсасын он көтүрүлдүйүнү вә верилмиш (4) ифадәсиндәки әдәдин (5) ифадәсиндә олдуғу кими язылмасыны шәртләшәрәк, бу системи онлуг сай системи адландырдыг. Эйни заманда юхарыда мүхтәлиф халгларын сай системләринин әсасыны он дейил, башга натурал әдәд әмәлә кәтирә биләчәйи гәнаәти дә һасил эдилди. Һесабламанын әсасыны ики дә көтүрмәк олар, йә'ни мүәййән

[1] Санскрит дили гәдим вә орта әсрдә Һиндистанын әдәби дили олмушдур.

әшя чохлуғунун элементләрини саймаг үчүн бу чохлугдан шейләри ики-ики айырмаг олар. Бу һалда мүмкүндүр ки, ердә я һеч бир шей галмасын я да бир шей галсын. Сонра айырдығымыз ики-ики шей топасыны, әкәр мүмкүндүрсә дөрд-дөрд, сәккиз-сәккиз, он алты-он алты айыраг. Бурада тәклийи 1 илә, олмаян ваһидләрин ериндә 0 язмағы шәртләшәк. Беләликлә, икилик сай системиндә „ики“ әдәди сайын әсасы олдуғундан икинчи мәртәбәнин бир ваһиди олачагдыр. Бу ваһид „10“ шәклиндә язылачаг. Онда „үч“ әдәди икинчи мәртәбәнин бир ваһидиндән (ики) вә садә тәкликдән (1) ибарәт олдуғундан, 11 кими язылачагдыр. „Дөрд“ әдәди икинчи мәртәбәнин ики ваһидиндән ибарәт олдуғуна көрә үчүнчү мәртәбәнин ваһиди олур. Үчүнчү мәртәбәни 100 кими язмалыйыг. Сәккиз исә дөрдүнчү мәртәбәнин бир ваһиди олдуғу үчүн 1000 кими язмалыйыг. Бурадан көрүнүр ки, икилик сай системиндә әдәди язмаг үчүн чох ер тәләб олунур. Мәсәлән, 15 әдәдини икилик сай системиндә язаг. 15-дә дөрдүнчү мәртәбәнин бир ваһиди (сәккиз), үчүнчү мәртәбәнин бир ваһиди (дөрд), икинчи мәртәбәнин бир ваһиди (ики) вә нәһайәт бир тәклик вардыр. Она көрә „он беш“ әдәдини 1111 кими язмалыйыг.

Әкәр икилик сай системиндә язылмыш 10110 әдәдини охумаг лазым кәләрсә демәлийик ки, бурада бешинчи мәртәбәнин бир ваһиди, (йә'ни бир он алты) вардыр. Дөрдүнчү мәртәбәнин ваһиди йохдур, үчүнчү мәртәбәнин бир ваһиди (йә'ни бир дөрд) вардыр, икинчи мәртәбәнин бир ваһиди (йә'ни бир ики) вардыр, тәклик исә йохдур. Демәли, бизим яздығымыз әдәддә он алты, дөрд вә ики вардыр $(16+4+2)$, икилик системиндә яздығымыз 10110 әдәди онлуг системиндә 22-дир. Дедикләримизи тамамласаг 15 вә 22 әдәдләрини (онлуг сай системиндә язылмышдыр) икилик системиндә беләязмалыйыг:

$$15 = 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2 + 1 = (1111)$$
$$22 = 1\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2 + 0 = 10110.$$

Фикримизи үмумиләшдирәк. Тутаг ки, верилмиш N әдәдиндә, икилик системиндә $n+1$-чи мәртәбәдә a_n ваһид, n-чи мәртәбәдә a_{n-1} ваһид (я бирдир, я сыфыр) вә и. а. икинчи мәртәбәдә a_1 ваһиди (я бирдир, я сыфыр) вә нәһайәт a_0 ваһид вардыр (я бирдир, я сыфыр),

Әкәр икилик сай системиндә N әдәдинин һөкмән n-чи мәртәбәси вардырса, онда $a_n = 1$ олмалыдыр.

Беләликлә һәмин әдәди

$$N = 1\cdot 2^n + a_{n-1}\cdot 2^{n-1} + \cdots + a_2\cdot 2^2 + a_1\cdot 2 + a_0.$$

шәклиндә язмалыйыг.

Мәишәтдә он-он саймагдан башга беш-беш саймаг да хейли яйылмышдыр. Мәсәлән, Чиндә беш-беш саймаг гәбул олунмушдур. Белә ки, бешләр чүт-чүт груплашыр.

Инди әсасы беш олан позисион системдән (бешлик сай системи) бәһс едәк.

Һәр бир әдәди бешлик сай системиндә язмаг үчүн беш рәгәм кифайәтдир. Бу рәгәмләри

$$\underline{1},\ \underline{2},\ \underline{3},\ \underline{4},\ \underline{0}$$

илә ишарә едәк (онлуг системиндә ишләдилән рәгәмләрдән айырд етмәк үчүн, бешлик системиндә ишләдилән рәгәмләрин алтындан хәтт чәкилмишдир). Беш әдәди (бир беш) икинчи мәртәбәнин бир ваһидидир; садә тәклийин јериндә $\underline{0}$ язмагла, ону $\underline{1}\ \underline{0}$ илә ишарә етмәлийик (онлуг системиндә икинчи мәртәбәнин бир ваһиди 10 язылдығы кими). Фикримизи изаһ етмәк үчүн 278 әдәдини (онлуг системдә язылмышдыр) бешлик сай системиндә язаг. Һәр шейдән әввәл бу сайы (мүәййән гәдәр шейләрин сайыны) беш-беш айырмалыйыг.

Ола билсин ки, һәмин айрылышын сонунда сайы беш олмаян вә бешдән аз олан шейләр галсын, вә я һеч бир шей галмасын. Буну мүәййән етмәк үчүн 278-и бешә бөлмәк кифайәтдир:

$$\begin{array}{r}
278:5=55\\
-\underline{25}\\
28\\
-\underline{25}\\
3
\end{array}$$

Беләликлә, 278-дә 3 садә тәклик, 55 икинчи мәртәбә тәклийи вардыр. Лакин икинчи мәртәбәнин беш ваһиди, үчүнчү мәртәбәнин бир ваһиди олдуғундан (чүнки сай системинин әсасыны беш гәбул етмишик) икинчи мәртәбәнин 55 ваһидиндә нечә дәнә үчүнчү мәртәбәнин ваһиди олдуғуну тапмаг үчүн 55-и 5-ә бөлмәлийик:

$$\begin{array}{r}
55:5=11\\
-\underline{5}\\
5\\
-5
\end{array}$$

Демәли икинчи мәртәбәнин 55 ваһидиндә үчүнчү мәртәбәнин он бир ваһиди вар, икинчи мәртәбәнин ваһиди исә йохдур (олмаян ваһидин еринә 0 язмалыйыг.) Инди дөрдүнчү мәртәбәнин ваһидләрини тапмалыйыг.

Она көрә дә 11-и 5-ә бөлмәлийик:

$$\begin{array}{r}
11:5=2\\
-\underline{10}\\
1
\end{array}$$

йә'ни гисмәтдә 2, галыгда исә 1 алыныр. Демәли, дөрдүнчү мәртәбәдә 2 ваһид, үчүнчү мәртәбәдә исә бир ваһид вардыр. Беләликлә, 278 әдәдиндә дөрдүнчү мәртәбәнин ики ваһиди,

үчүнчү мәртәбәнин 1 ваһиди, икинчи мәртәбәнин сыфыр ваһиди вә нәһайәт үч садә тәклик вардыр. Беләликлә, 278 әдәдинин бешлик сай системиндә язылышы $\underline{2}\ \underline{1}\ \underline{0}\ \underline{3}$ олачагдыр.

Инди исә бешлик сай системиндә язылмыш бир әдәди, онлуг системдә язмағы өйрәнәк. Тутаг ки, бешлик системиндә язылмыш $\underline{4}\ \underline{3}\ \underline{2}\ \underline{1}$ әдәдини онлуг системиндә язмаг тәләб олунур. Бу язылышдан айдындыр ки, сағдан биринчи ердә язылмыш 1 әдәди садә бир (1) тәклийи, сағдан икинчи ердә язылмыш 2 әдәди ики 5-и, үчүнчү ердә язылан 3 әдәди үч, дәфә „беш—беши“ нәһайәт сол кәнардакы 4 әдәди исә $4 \cdot 5^3$ әдәдини көстәрир. Беләликлә, бешлик системиндә язылмыш $\underline{4}\ \underline{3}\ \underline{2}\ \underline{0}$ әдәди:

$$4 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 + 1 = 586$$

олар, демәли

$$\underline{4}\ \underline{3}\ \underline{2}\ \underline{1} = 586$$

олачагдыр.

Юхарыда гейд эдиләнләри үмумиләшдирсәк, дейә биләрик ки, әсасы беш олан сай системиндә верилмиш һәр бир натурал N әдәди

$$N = a_n \cdot 5^n + a_{n-1} 5^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 5 + a_0$$

шәклиндә көстәрә биләрик. Белә ки, a_n, $a_{n-1}, \cdots, a_1$, a_0 коэфисиентләри 0, 1, 2, 3, 4 гиймәтләрини ала биләр.

Демәли биз һәмин N әдәдини

$$N = a_n \cdot a_{n-1} \cdots a_1 \cdot a_0$$

шәклиндә язмалыйыг.

Верилмиш бир әдәди еддилик системиндә язсаг

$$N = a_m \cdot 7^m + a_{m-1} \cdot 7^{m-1} + \cdots + a_1 \cdot 7 + a_0$$

аларыг. Демәли һәмин натурал N әдәдини еддилик системиндә $N = a_m \cdot a_{m-1} \cdots a_1 \cdot a_0$ шәклиндә язмалыйыг. Гейд эдиләнләри тамам үмумиләшдирсәк дейә биләрик ки, p әсасына көрә язылмыш

$$a_n \cdot a_{n-1} \cdots a_1 \cdot a_0$$

әдәди

$$a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0$$

әдәдиндән ибарәтдир.

Бурада сай системинин әсасы көтүрүлән p әдәди 10 әдәдинә бәрабәр, бөйүк вә я кичик көтүрүлә биләр. $p < 10$ оларса, верилмиш әдәди язмаг үчүн онлуг системиндә һәмин әдәдин язылышында тәләб олунан рәгәмләрдән чох, $p > 10$ олдугда исә аз рәгәм тәләб олунур. Бу, сай системинин һәм әлверишли, һәм дә әлверишли олмаян чәһәтини ортая чыхарыр. Сай системинин әсасыны лап кичик көтүрдүкдә эйни бир әдәдин язылмасы үчүн чох ер лазым олур. Әсас бөйүк олдугда исә чохлу рәгәм ядда сахламаг лазым кәлир. Мәсәлән, икилик системиндә 0, 1; бешлик системиндә 0, 1, 2, 3, 4; еддилик

системиндә 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6; онлуг системиндә исә 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 кими он рәгәм гәбул эдилиб ишләдилмәлидир. Оникилик системиндә исә бу рәгәмләрдән башга он әдәдини (α), он бир әдәдини (β) ишарә эдән рәгәмләри дә әлавә этмәлийик.

Беләликлә, оникилик сай системиндә „он ики“ 10 кими, „ийирми ики“ 1 α (чүнки 22-дә бир дәнә он ики вә он тәклик вардыр). „Ийирми үч“ әдәди 1 β шәклиндә язылмалыдыр. „Йүз гырх бир“ исә β 9 кими язылмалыдыр (чүнки „йүз гырх бир“ әдәдиндә он ики он бир (β), 9 тәклик вардыр. α β әдәди исә „йүз отуз бир“-ин язылышыдыр (чүнки $\alpha\beta = 10 \times 12 + 11 = 131$).

4. Әсли әдәдләр

Биз юхарыда натурал әдәдләр үзәриндә апарылан әсас әмәлләрин хассәләрини көстәрдик. Лакин натурал әдәдләрин бир сыра дахили ганунларына тохунмадыг. Бунлардан натурал әдәдләрин бөлүнмә габилиййәти, һәр бир натурал әдәдин әсли вуруглара айрылмасы, әсли әдәдләрин сайсыз чох олмасы кими ганунлары көстәрмәк олар.

Натурал әдәдләрин белә хассәлари *әдәдләр нәзәриййәси* адланан фәндә өйрәнилир.

Әдәдләр нәзәриййәсиндә әсли әдәдләрин чох әһәмиййәти вардыр. Ваһиддән бөйүк олуб ялныз өзүнә вә ваһидә бөлүнән, һәр бир натурал әдәдә *әсли әдәд* дейилир. Мәсәлән,

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 вә с. әдәдләри әсли әдәдләрдир.

4, 6, 8, 9, 10, 12, 14 вә с. әдәдләр исә әсли әдәд дейилдир, чүнки бунларын ваһиддән вә өзүндән башга бөләнләри вардыр:

$$14 = 7 \cdot 2; \qquad 20 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \text{ вә с.}$$

Әсли олмаян (мүрәккәб) әдәдләрин әлверишли ҹәһәтләриндән бири онларын әсли вуруглара айрыла билмәсидир. Мүрәккәб әдәдин ардычыл сурәтдә бөләнләрини тапмагла ону әсли вуруглара айырмаг олар:

$$36 = 18 \cdot 2 = 9 \cdot 2 \cdot 2 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$$

Тарихән ән гәдим мәсәләләрдән бири мүхтәлиф әсли әдәдләрин сайынын сонлу вә я сонсуз олмасы мәсәләсидир. Әсли әдәдләрин сонсуз сайда олмасы чох гәдим заманлардан мә'лумдур. Бунун Эвклиддән[1] габаг мә'лум олдуғуна шүбһә ола

---

[1] Эвклид гәдим юнан, риязийятчысы, Искәндәриййә мәктәбинин мәшһур һәндәсә алимидир. Бә'зи тарихчиләрин вердикләри мә'лумата көрә (онун һәят вә фәалиййәти һагда дүрүст мә'лумат йохдур) о, бизим эрадан әввәл IV—III әсрләрдә яшамышдыр.

Эвклид дөврүнә гәдәр юнан һәндәсәсинин наилиййәтләрини топлаярағ „Башланғычлар“ адлы 13 китабдан ибарәт өлмәз бир әсәр язмышдыр.

Бу әсәр 2500 илдән артыг бир дөвр әрзиндә бүтүн сынаглардан чыхараг гиймәтини азалтмамыш вә гәдим риязийятын мөһтәшәм бир абидәси олараг яшамыш вә яшамагдадыр.

билмәз. Эвклид өзүнүн „Башланғычлар“ адлы әсәриндә әсли әдәдләрин сонсуз сайда олдуғуну „долайы үсулла“ (әксини фәрз эдәрәк зиддиййәтә кәлиб чыхмаг үсулу илә) исбат этмишдир. Бу риязи тәклифин исбатыны көстәрәк. Тутаг ки, әсли әдәдләрин сайы чох бөйүк олса белә енә сонлудур. Онларын n дәнә, олдуғуну фәрз эдәк. Бу әсли әдәдләри

$$P_1,\ P_2,\ P_3, \ldots,\ P_n$$

илә ишарә эдәк. Һәмин әдәдләрин ичәрисинә бизим билдиййимиз

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17, \ldots$$

әсли әдәдләринин дә дахил олдуғуна шүбһә йохдур. Бу әдәдләри бир-биринә вуруб үзәринә бир ваһид әлавә эдәрәк вә алынан әдәди P илә ишарә эдәк:

$$P = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdots P_n + 1.$$

Айдындыр ки, P әдәди $P_1,\ P_2,\ P_3, \ldots, P_n$ әдәдләринин һәр бириндән бөйүкдүр вә әсли әдәд дейилдир (чүнки әсли әдәдләрин һамысы $P_1, P_2, \ldots, P_n$-ләрин ичәрисиндәдир).

Онда P әсли әдәд олмадығы үчүн әсли вуруглара айрыламалыдыр, йә’ни, бир вә я бир нечә әсли әдәдә галыгсыз бөлүнмәлидир. Бу исә мүмкүн дейилдир, чүнки P әдәди бунларын һәр биринә бөлүндүкдә 1 галыг галыр. Демәли, бизим садә әдәдләрин сонлу сайда олмасы һаггындакы фәрзиййәмиз зидд нәтичәйә кәтириб чыхарыр. Она көрә әсли әдәдләрин сайы сонлу дейил, сонсуздур. Алдығымыз бу нәтичә бир гәдәр „нәзәри“ олса да һәмин йол илә сонсуз сайда әсли әдәдләр тапмаг олар.

Тутаг ки, һансы йолла олурса-олсун $P_1,\ P_2, \ldots, P_n$ дәнә әсли әдәд тапмышыг. Бә’зи һалларда

$$P_{n+1} = P_1 \cdot P_2 \cdots P_n + 1 \qquad (6)$$

әсли әдәд олур. Бу гайда илә давам этсәк сонсуз сайда әсли әдәдләр әлдә этмиш оларыг[1]. Мәсәлән тутаг ки, $P_1 = 2,\ P_2 = 3$ әсли әдәдләрини тапмышыг.

Онда

$$P_3 = 2 \cdot 3 + 1 = 7,$$
$$P_4 = 2 \cdot 3 \cdot 7 + 1 = 43,$$
$$P_5 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43 + 1 = 1807,$$

вә и. а. чохлуча әсли әдәд тапмаг олар. Биз әсли әдәдләрин алынмасы үчүн (6) формулундан истифадә этдик. Лакин һәмин формул васитәсилә истәдиййимиз садә әдәди ала билмирик. Мәсәлән, индичә нәзәрдән кечирдиййимиз мисалда $P_1 = 2,\ P_2 = 3$ әдәдләриндән башлайыб галан әсли әдәдләри гурмаг истәдикдә бир нечә әсли әдәди гура билмәдик.

[1] (6) формулу бә’зән әсли олмаян әдәди дә ифадә эдир. Мәсәлән, $P_1 = 3,\ P_2 = 7$ олдугда $P_3 = 3 \cdot 7 + 1 = 22$ олур.

Доғрудан да 5, 11, 12,... әсли әдәдләрини бу гайда илә гурмаг олмур. Әсли әдәдләри гурмаг үчүн башга формуллар да мөвчуддур. Лакин бу формуллар васитәсилә дә бүтүн әсли әдәдләри әлдә этмәк мүмкүн дейилдир.

Ферма (1601—1665) белә бир фикир сөйләмишдир ки, куя

$$F(n) = 2^{2^n} + 1$$

шәклиндә олан бүтүн әдәдләр әслидир. Мәсәлән, $n = 1, 2, 3, 4$ олдугда

$$F(1) = 2^2 + 1 = 5,$$
$$F(2) = 2^{2^2} + 1 = 17,$$
$$F(3) = 2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 257,$$
$$F(4) = 2^{2^4} + 1 = 2^{16} + 1 = 65537.$$

Лакин 1732-чи илдә бөйүк рус вә алман алими Эйлер[1] көстәрди ки,

$$2^{2^5} + 1 = 641 \cdot 6700417$$

кими вуруглара айрылыр. Демәли,

$$F(5) = 2^{2^5} + 1$$

әсли әдәд дейилдир.

Сонра Ферма формулу васитәсилә даһа бир нечә мүрәккәб әдәд тапылмышдыр. Лакин индийә гәдәр Ферма формулу васитәсилә сонсуз сайда әсли әдәд әлдә эдилә биләчәйи исбат эдилмәмиш галмышдыр.

$f(n) = n^2 - n + 41$ формулу васитәсилә дә әсли әдәд әлдә этмәк олар. Мәсәлән, $n = 1, 2, \ldots, 40$ көтүрдүкдә әсли әдәд, $n = 41$ көтүрдүкдә исә мүрәккәб әдәд әлдә эдилир:

$$f(41) = 41^2$$

$n^2 - 79n + 1601$ формулу васитәсилә дә 1-дән 79-а кими әсли әдәдләр алына биләр. Артыг $n = 80$ олдугда мүрәккәб әдәд

[1] Эйлер бөйүк риязийятчы, механик вә физикдир. 1707-чи илдә о Исвечрәдә анадан олмушдур. Илк тәһсилини атасынын янында алмыш вә кәнч яшларындан Бериуллинин рәһбәрлийи алтында риязийят өйрәнмәклә мәшғул олмушдур. 1720-чи илдә Базел (Исвечрәдә) Университетинә дахил олмуш вә Бериуллинин риязийята аид сөйләдийи мүһазирәләри динләмишдир. Эйлер 1727-чи илдә Петербург Элмләр Академиясына дә'вәт олунмушдур. Бурада о, риязи ярадычылығы инкишаф этдирмәк үчүн яхшы шәраит тапмышдыр. 1741-чи илдә Берлинә кетмиш вә Берлин академиясында өз ярадычылығыны давам этдирмишдир. 1766-чы илдә енидән Петербурга гайытмышдыр.

Эйлер ән мәһсулдар риязийятчы олмушдур. Онун 550-ә яхын китаб вә мәгаләләри вардыр. О, риязийят, механика, дәнизчилик, физика, эластиклик нәзәриййәси кими мүхтәлиф элмләр саһәсиндә элми-тәдгигат ишләри апармышдыр.

Эйлер 1783-чү илдә Петербургда вәфат этмишдир.

алыныр. Әсли әдәдләр күлли мигдардадыр. Онларын сонсуз сайда олдуғу юхарыда көстәрилди. Риязийятда белә һаллларда дейилир ки, әсли әдәдләрин сонсуз сайда олмасы исбат эдилмишдир. Һазырда 1-дән 10000000-а гәдәр олан әдәдләр арасындакы бүтүн әсли әдәдләрин ҹәдвәли вардыр.

Әсли әдәдләрин бир нечә өзүнә хас олан хассәләри вардыр:

1) 2 мүстәсна олмагла бүтүн әсли әдәдләр тәк әдәдләрдир. Һәр бир ҹүт әдәди $2 \cdot n$ шәклиндә көстәрә биләрик.

Онда айдындыр ки, бу әдәд 2-йә, n-ә, 1-ә, $2n$-ә бөлүндүйүндән әсли әдәд дейилдир.

2) Фәргләри 1-ә бәрабәр олан натурал әдәдләрә *янашы натурал әдәдләр* дейилир, мәсәлән, 2 вә 3; 5 вә 6; 101 вә 102 вә и. а.

Ҹох тәәҹҹүблүдүр ки, бүтүн янашы натурал әдәдләр ичәрисиндә ялныз 2 илә 3 әсли әдәдләрдир. Доғрудан да 2-дән башга һансы әсли әдәди көтүрсәк о, тәк әдәд, она янашы олан әдәд исә ҹүт әдәд олмалыдыр, ҹүт әдәд исә (2-дән башга) әсли әдәд дейилдир.

3) Әсли әдәдләр ичәрисиндә фәрги 2 оланлар да вардыр. Мәсәлән, 3 вә 5, 5 вә 7, 11 вә 13 вә и. а. белә әсли әдәдләр ҹүтүнә *экиз әдәдләр* дейилир.

5. Ән бөйүк ортаг бөлән вә ән кичик ортаг бөлүнән

Тутаг ки, ики a вә b натурал әдәдләри үчүнҹү c натурал әдәдинә бөлүнүр. Һәмин c натурал әдәдинә a вә b натурал әдәдләринин *ортаг бөләни* дейилир. Ики вә даһа чох натурал әдәдләрин һеч олмазса, бир дәнә ортаг бөләни вардыр. Мәсәлән, 1 әдәди ики вә даһа чох ихтияри натурал әдәдләрин ортаг бөләнидир. Ики вә икидән чох натурал әдәдләрин ортаг бөләнләри бир нечә дәнә дә ола биләр. Мәсәлән, 2, 3, 6 әдәдләри, 18 илә 24 әдәдләринин ортаг бөләнләридир.

Ортаг бөләнләр бөлүнәнләрин һәр бириндән кичик олдуғу үчүн верилмиш ики натурал әдәдин ортаг бөләнләри сонлу сайдадыр вә бу ортаг бөләнләрин ичәрисиндә бириси галанларындан бөйүкдүр. Бу ахырынҹы бөләнә *ән бөйүк ортаг бөлән* дейилир. Мәсәлән, 18 илә 24 әдәдинин ән бөйүк ортаг бөләни 6-дыр[1].

Ән бөйүк ортаг бөләни ваһидә бәрабәр олан ики натурал әдәдә *гаршылыглы әсли әдәдләр* дейилир.

Инди дә верилмиш ики a вә b натурал әдәдләринә бөлүнән әдәдләри нәзәрдән кечирәк.

Верилмиш ики a вә b натурал әдәдләринә бөлүнән үчүнҹү натурал әдәдә бу ики натурал әдәдин *ортаг бөлүнәни* дейи-

---

[1] Ики вә я бир нечә натурал әдәдин ән бөйүк ортаг бөләнини тапмаг үчүн Эвклид алгорифминдән истифадә этмәк олар (бу барәдә һесаб китабларына мүрачиәт эдилә биләр).

лир. Мәсәлән, 5 вә 7 әдәдләринин бир чох ортаг бөлүнәнләрини көстәрмәк олар. 35, 70, 105, 140 вә и. а. әдәдләри 5 вә 7-нин ортаг бөлүнәнләридир. Бурадан көрүнүр ки, верилмиш ики натурал әдәдин ортаг бөлүнәнләринин сайы сонсуздур. Лакин бу ортаг бөлүнәнләрин ичәрисиндә бириси галанларынын һамысындан кичикдир. Буну c илә ишарә едәк. Бу ахырынчы бөлүнәнә, верилмиш a вә b әдәдләринин *ән кичик ортаг бөлүнәни* дейилир вә belә ишарә едилир:

$$(a, b) = c.$$

Бизим мисалда $c = 35$-дир: $(5, 7) = 35$ олур.

Ейнилә бир нечә натурал әдәдин ән кичик ортаг бөлүнәнини дә тапа биләрик. Мәсәлән, $a, b, c, \ldots, d$ әдәдләринин ән кичик ортаг бөлүнәнини тапмаг үчүн әввәлчә a вә b әдәдләрини көтүрүб онларын ән кичик ортаг бөлүнәнини тапырыг, сонра бу әдәдләри силиб ерләриндә онларын ән кичик ортаг бөлүнәнини язырыг. Алынан әдәдләри дә белә едирик. Белә олдугда ахырда ики әдәд галачағы айдындыр. Бу ики әдәдин ән кичик ортаг бөлүнәни, верилән әдәдләрин һамысынын ән кичик ортаг бөлүнәни адланыр. Мәсәлән,

$$(4, 5, 7, 18) = (20, 7, 18) = (140, 18) = 1260.$$

Верилмиш әдәдләрин ән кичик ортаг бөлүнәнини тапмаг үчүн онлары әсли вуругларына айырмаг, сонра бу әдәдләрин һәр ортаг вуругларындан бирини көтүрүб ортаг олмаян вуругларын һамысына вурмаг лазымдыр

$$(4,9) = 36, \quad \text{чүнки} \quad 4 = 2 \cdot 2, \quad 9 = 3 \cdot 3.$$

Бурада $C = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$.

Инди исә 36 илә 18-ин ән кичик ортаг бөлүнәнини тапаг:

$$(36,18) = 36$$

чүнки
$$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3,$$
$$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3,$$
бурада
$$C = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 36.$$

§ 2. КӘСРЛӘРИН МӘНШӘИ ВӘ ТӘШӘККҮЛҮ

Биз индийә гәдәр сай просесинин нәтиҗәсиндә яранмыш вә сонралар инкишаф етмиш натурал әдәдләр анлайышындан бәһс етдик. Инсанлар өз әмәли вә зеһни фәалиййәтиндә шейләри тәкҹә саймагла кифайәтләнмәмишләр. Онлар һәлә чох гәдим заманлардан, һәятын күнү-күндән артан тәләбләри гаршысында узунлуг, чәки, һәҹм кими кәмиййәтләри[1] өлчмәк

[1] Кәмиййәтләр һаггында II һиссәнин § 1-дә мүфәссәл мә'лумат верилмишдир.

ишинә дә сә'й этмишләр. Бурада инсанларын әмәли фәалиййәти вә элечә дә һәятдакы эһтиячы дедикдә бир инсанын вә я бир нәслин әмәли фәалиййәти дейил, нәсилдән-нәслә мирас галмыш, узун бир тарихи инкишаф йолу кечмиш инсан тәчрүбәси вә инсан эһтиячы баша дүшүлмәлидир.

Ән дүзкүн вә һәяти тәчрүбә, тарихин сәмәрәли сүзкәчләриндән кечмиш вә сонракы нәслә мирас галмышдыр.

Һәр чүр сәмәрәсиз олан вә һәяти олмаян тәчрүбә эләчә дә бу тәчрүбәйә әсасланан нәзәриййә кеч вә я тез белә бир сүзкәчдән кечә билмәдийиндән сонракы нәслә мирас галмамышдыр. Эләчә дә әдәдләр һаггындакы анлайышлар тәмизләндикдән, сүзүлдүкдән сонра нәсилдән-нәслә кечмишдир.

Инсанлар даг дөшләриндән, чай кәнарларындан дәниз дибиндән ахтардыгы тәмиз, чилаланмыш, тәбии инчиләр, кристаллар, мин гат сүхурлардан сүзүлмүш шәффаф сулар кими әдәдләри дә һәятын әсрарәнкиз һадисәләри ичәрисиндән тапыб чыхардараг өз эһтиячларына табе этмишләр.

Кәмиййәтләрин өлчүлмәси тарихән инсан тәчрүбәсиндә гат-гат вә кетдикчә назикләшән сүзкәчләрдән кечмишдир.

Әввәлләрдә өлчүләр „көзәяры“ апарылырды. Мәсәлән, узунлуғу өлчмәк үчүн әл, дирсәк, гулач, аддым, ағач кими өлчүләрдән истифадә эдилирди. Юхарыда Халдейләрин дирсәк узунлуғу (525 *мм* $\approx$ 0,5 *м*) узунлуг ваһиди гәбул этдикләрини көрдүк. Гәдим өлчү ваһидләриндән чәрәк, гулач, ағач инди дә чох ердә ишләдилир. Сонралар, инсан ә'залары олан әл, дирсәк, гол, аддым тәгрибән бу узунлугда көтүрүлән чубуг вә и. а. кими өлчү ваһидләрилә әвәз эдилди. Бир чисмин узунлуғуну өлчмәк үчүн инсанлар һәмин чубуғу өлчүләчәк чисмин боюна тутуб онда нечә дәфә ерләшдийини йохлайырдылар. Бә'зән өлчү ваһиди, чисмин узунлуғунда там дәфә ерләшмәдикдә өлчү ваһидини гырыб ярыя, үч ерә, дөрд вә и. а. һиссәйә бөлүб һәмин чисми кичик өлчү ваһидләрилә өлчүрдүләр.

Ағырлығы тә'йин этдикдә исә ваһид гәбул эдилән бир дашы ерә чырпараг онун парчаларыны ваһид гәбул эдирдиләр. Беләликлә даһа кичик ваһидләр сечилмәйә башлады.

Натурал әдәд анлайышынын тәшәккүлүндән һәлә чох сонра ваһидин бөлүнмәз олдуғу фикри һөкм сүрмәкдә иди. Даһа кичик, дәгиг өлчү ваһидләринин яранмасы, әввәлки өлчү ваһидләринин ики, үч, дөрд вә и. а. бәрабәр һиссәйә бөлүнмәси ваһидин бөлүнмәз олмасы фикринә сон гойду. Ваһидин ики, үч, дөрд бәрабәр һиссәйә бөлүнәрәк бир һиссәнин ени ваһид гәбул эдилмәси садә кәср ваһидләрини яратды. Беләликлә $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ вә и. а. садә кәсрләри мейдана чыхды.

Гейд этмәк лазымдыр ки, бу кәсрләр мүчәррәд кәср кими дейил, айры-айры кәмиййәтләрин өлчү ваһиди кими ишләди-

лирди. Риязи фикир инкишафынын һәмин дөврүндә ади кәср ики натурал әдәдин гисмәти кими мә'лум дейилди. Мүхтәлиф халглар мүхтәлиф кәср ваһиди ишләдирдиләр.

Халдейләрин, өлчү вә чәки ваһидләр системи XVIII әсрин ахырларында яранмыш, метрик өлчү вә чәки системләринә гәдәр элми әсасы олан еканә систем олмушдур.

Бабилиләрин риязи әсәрләриндә мәхрәчи 6 олан $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{5}{6}$, кәсрләринә раст кәлирик. (Бурада ваһидин нечә бәрабәр һиссәйә бөлүндүйүнү көстәрән әдәдә мәхрәч, бу бәрабәр һиссәләрдән нечәсинин көтүрүлдүйүнү көстәрән әдәдә исә сурәт дейилир.) Икинчи синиф кәсрләр исә мәхрәчи 60, сурәти 1-дән 59-а кими натурал әдәдләрдән ибарәт олан кәсрләрдир. Бабилиләрин, мәхрәчи 60 олан кәсрләр көтүрдүкләринин сәбәбини 60 әдәдинин чохлу бөләнләринин олмасы вә илин тәгвим күнләринә бөлүнмәси илә изаһ эдилир. Бир чох риязийят тарихчиләри 60-лыг системинин, онлуг вә алтылыг системләринин синтезиндән ирәли кәлдийини дә сөйләйирләр. Алтмышлыг сай системи Халдейләрин өлчү вә чәки системинин әсасы гәбул эдилмишдир. Онлар өлчү системинин әсасы олараг 60 хәттә бөлүнән дирсәк ишләдирдиләр.

Эрамыздан 2—3 йүз ил әввәл гәдим Мисир әразисиндән тапылан папируслардан, эһрамлар вә сүтунлардакы язылардан, нәгшләрдә мисирлиләрин йүксәк һесаблама техникасына саһиб олдуглары, садә кәсрләр васитәсилә һесабламалар апардыглары ашкар олмушдур.

Мисир һесаблайычылары[1] һәр бир кәсри „әсас" кәсрләрин чәми кими көстәрә билирдиләр. Әсас кәср дедикдә бир нечә кәср $\left(\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \text{вә и. а.}\right)$ мүстәсна эдиләрсә, $\frac{1}{к}$ (*к*—натурал әдәддир) шәклиндәки „ваһид" кәсрләр баша дүшүлүрдү.

Мисирлиләр белә „ваһид" кәсрләри язмаг үчүн бизим һазырда мәхрәчдә яздығымыз әдәд еринә ваһидин һиссәләринин сайыны, онун үстүндә исә ⬭ ишарәсини язырдылар (бу ишарә әввәлләрдә һәчм ваһиди еривдә ишләдилирди, тәхминән 0,17 литрә бәрабәр тутулурду). Мәсәлән $\frac{1}{5}$-и

[1] Һесаблама ишләри гәдим Шәрг аләминдә мирзәләр тәрәфиндән апарылырды. Гәдимдә мирзәлик йүксәк пешә сайылырды. Мирзәләр саваддлы, бөйүк һесаблама истедадына вә яддаша саһиб олмалы иди.

, $\frac{1}{10}$-и , $\frac{1}{15}$-и шәклиндә ишарә

едирдиләр.

Сонралар бу һероглиф[1] ишарәләр дәйишдириләрәк башга шәклә дүшдү. Мәсәлән, ишарәси нөгтә илә әвәз едилди. Нүмунә үчүн ринд папирусларындакы бир нечә ишарәни көстәрәк:

$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$

$\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ кәсрләри дә юхарыда гейд етдийимиз кими әсас кәсрләрдән сайылырды, йә'ни бу кәсрләр садә адландырдығымыз кәсрләрин чәми васитәсилә дейил, мүстәгил кәср кими ишлә-нирди. Гейд етдийимиз кими, о заман кәсрләр һаггында үмуми мүлаһизәләр йүрүдүлмүрдү. Кәсрләр фәрди хүсусиййәтләринә көрә танынырды. Сонралар садә кәср сайылан бә'зи белә кәсрләр, $\frac{1}{k}$ (буну $\overline{k}$ илә ишарә едәк) шәклиндә олан „ваһид“ кәсрләрин чәми кими көстәрилди. Мәсәлән, мүасир ишарәләрлә язсаг $\frac{3}{4}=\overline{2}\,\overline{4}$ шәклиндә ишләнирди[2]. Еләчә дә $\frac{2}{3}=\overline{3}\,\overline{3}$ кими язылдығы һалда $\frac{2}{3}$ кәсри садә һесаб едилирди. Чох марағлыдыр ки, $\frac{2}{5}$ кәсри $\overline{5}\,\overline{5}$ шәклиндә дейил, $\overline{3}\,\overline{15}$ шәклиндә ифадә едилирди.

Еләчә дә $\frac{7}{8}=\overline{2}\,\overline{4}\,\overline{8}$ кими язылырды. Ринд папирусунун әввәлләриндә 2 әдәдинин 3 илә 99 арасында олан тәк әдәд-

---

[1] Һероглиф чох айдын рәсм едилмиш Мисир язы тарихиндә гәдим ишарәләрдир. Бу ишарәләр Мисир әразисиндә олан гәдим абидәләр үзәриндә һәкк едилмишдир.

[2] $\overline{2}\,\overline{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ демәкдир. Ян-яна язылан кәср һиссәләри арасында чәм ишарәси дүшүнүлмәлидир.

ләрә бөлүнмәсинә хүсуси диггәт верилмишдир. Мәсәлән, һәмин папирусларда „2-ни 3-ә, 5-ә 17-йә вә и. а. бөл“ сөзләринә раст кәлирик. Мүасир дилдә десәк папирусда $\frac{2}{2n+1}$ кәсрини (n әдәди 1-дән 49-а кими натурал гиймәтләр алыр), онда мәхрәч 3-дән 99-а кими натурал гиймәтләр алыр), сурәти ваһид олан кәсрләрлә ифадә этмәк мәсәләси нәзәрдән кечирилир. Һәтта бир кәсрин бир нечә ифадәсинә дә раст кәлмәк олур. Мәсәлән,

$\frac{2}{43} = \overline{24}\ \overline{258}\ \overline{1032}$; $\overline{30}\ \overline{86}\ \overline{645}$; $\overline{36}\ \overline{86}\ \overline{645}\ \overline{172}\ \overline{774}$; $\overline{40860}\ \overline{1720}$; $\overline{42}\ \overline{86}\ \overline{129}\ \overline{301}$ вә и. а. кими мүхтәлиф шәкилдә язырлар.

Бабилиләрә кәлдикдә гейд этмәк лазымдыр ки, онлар 60 әсасына кәрә тәкчә натурал әдәдләри дейил, кәсрләри дә ифадә этмәк мәсәләси илә мәшғул олмушлар (биз кәсрләри онлуг кәсрләрлә көстәрдийимиз кими). Мәсәлән, һазырда $2\frac{3}{5} = 2{,}6$ шәклиндә яздығымыз кими бабилиләрдә $2\frac{36}{60}$ шәклиндә язырдылар вә кими ишарә эдирдиләр.

Юхарыда яздығымыздан айдындыр ки, бу ишарә эйни заманда $156 = 2 \cdot 60 + 36$-ны ифадә эдир. Башга сөзлә бабил язылары, әдәдләри биргиймәтли сурәтдә тә'йин этмир. Кәсрләрин 60-лыг системиндә көстәрилмәси бабилиләрин ишләтдийи үмуми үсул иди. Садә кәсрләр $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ үчүн онлар вә Бабилистанда яшаян халглар (сумериләр вә аккадлар) хүсуси ишарәләр ишләдирдиләр.

Сумериләр $\frac{1}{2}$ кәсрини , $\frac{1}{3}$ кәсрини , $\frac{2}{3}$ кәсрини шәклиндә ишарә эдирдиләр. Сонралар аккадлар һәмин кәсрләри уйғун олараг шәклиндә ишарә эдирдиләр.

Кәсрләр башга халглар тәрәфиндән дә өлчү вә чәки ишләриндә ишләдилмишдир. Халгларын биркә сә'й вә тәшәббүсү нәтичәсиндә адлы кәсрләр сай просесиндә олдуғу кими кетдә өз адларындан, өлчү просесинин нәтичәси олмасындан

узаглашыб үмуми, мүчәррәд бир мә'на кәсб этмишдир. Һесаб фәнни әдәдләр һаггында бир элм олараг инкишаф этмәйә башладығы замандан кәсрин мүчәррәд маһиййәти мейдана чыхды, кәсрә ики натурал әдәдин нисбәти кими бахылмаға башланды вә кәсрләр натурал әдәдләрә гошулду. Бу исә натурал әдәдләрин биринчи кенишләнмәси олду. Кәср хәттинә XII әсрдә Әл-Һассаринин әсәриндә раст кәлирик.

Онлуг кәсрә[1] (йә'ни мәхрәчи он вә онун гүввәти олан кәсрләрә) илк дәфә һиндлиләрдә раст кәлирик. Онлар онлуг кәсри, кәср хәтти илә язырдылар.

XV әсрдән башлаяраг онлуг кәсрләр элмдә ишләдилирди. XVIII әсрдә исә онлуг өлчү вә чәки системи гәбул эдилмәсиндән сонра онлуг кәсрләр һесаб элминдә сабит бир мөвге тутду.

Кәсри ики натурал әдәдин нисбәти кими көтүрмәк, натурал әдәдләрә мәхрәчи ваһид олан кәср кими вә я бири дикәринә там дәфә бөлүнән ики натурал әдәдин нисбәти кими бахмаға имкан верир. Тутаг ки, p вә q ики натурал әдәддир. Бир өлчү просесиндә өлчүлән кәмиййәтин вә я бир чохлуғу q бәрабәр һиссәйә бөләрәк алынан һиссәләрдән p дәнә көтүрдүйүнү $\frac{p}{q}$ кәср илә көстәрәчәйик. Буну дәриндән тәһлил этдикдә һәмин өлчү просесинин маһиййәтчә сай просесинә бәнзәдиййини дуймаг чәтин дейилдир. Она көрә дә инсанда илк дәфә һәмин просесин нәтичәсини натурал әдәд тәбиәтли бир әдәдлә ифадә эдә билмәк фикри ояныр вә кәсрләр әдәдләр синфинә аид эдилир. $q=1$ олдугда $\frac{p}{q}=p$ олур. p ихтияри натурал әдәд олдуғундан натурал әдәдләр бүтүн мүмкүн олан $\frac{p}{q}$ шәклиндәки әдәдләр ичәрисинә дахил эдилир.

XVIII әсрдә белә кәсрләрин өйрәнилмәси чәтин һесаб эдилирди вә һәтта һәмин әсрдә кәсрә „сыныг әдәд" дә дейилирди. Эйни заманда кәсрә там әдәдлә ифадә эдилә билмәйән ики там әдәдин нисбәти кими дә бахырдылар. Эйлер язырды: „Әкәр бөлмәдә бөлүнәни там дәфә бөлмәк мүмкүн дейилдирсә, онда бөләнин бөлүнәндә нечә дәфә ерләшдиййини көстәрән нисбәтә *сыныг әдәд* вә я *кәср* дейилир. Гейд этмәк лазымдыр ки, һәлә XVII әсрдә кәсрә бөйүк риязиййатчылар белә әдәд демирдиләр. Мәсәлән, Валлис[2] белә һесаб эдирди ки, кәср әдәд дейилдир.

---

[1] Онлуг кәср һаггында I һиссә § 5-дә этрафлы мә'лумат вериләчәкдир.

[2] Жон Валлис (1616—1703) инкилис риязиййатчысыдыр. Оксфорд университетинин һәндәсә профессору олмушдур. Онун „Сонсузлуг һесабы" китабы интеграл һесабынын яранмасы тарихиндә бөйүк рол ойнамышдыр. Бу китабда чохлу мигдарда мүхтәлиф һәндәсә мәсәләләри һәлл эдилмиш, мүәййән интеграллар һесабланмышдыр (элмә интеграл анлайышы дахил олмаздан әввәл). О, даирәнин квадратурасы мәсәләси илә әлагәдар олараг π әдәдинин ифадәсини тапмышдыр. Әләчә дә (∞) ишарәсини дахил этмиш вә параллелләр нәзәриййәси илә дә мәшғул олмушдур.

XVIII әсрин икинчи ярысындан э'тибарән кәсрләр натурал әдәдләр кими, әдәд дейә кениш мигясда ишләдилмәйә башланды.

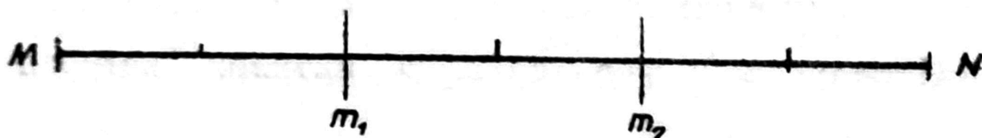
Риязийят аләминдә истәр гәдим заманларда истәрсә дә сонралар ени әдәдләр кәшф эдилән кими бу әдәдләр үзәриндә әсас риязи әмәлләрин (топлама, чыхма, вурма, бөлмә) гайдалары һазырланмалы олмушдур.

XVIII әсрин риязийятчылары мәхрәчи мүхтәлиф олан кәсрләрә бирчинсли кәср кими бахмырдылар. Она көрә дә онлар белә кәсрләри үмуми мәхрәчә кәтирмәйә, йә'ни бирчинсли этмәйә чалышырдылар вә бу гайда илә кәсрләри мүгайисә этмәк истәйирдиләр.

XVIII әсрин тәдрис китабларында

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a:m}{b:m}$$

формулларыны айдын һесаб эдиб, онларын әсасландырылмасына лүзум көрүлмүрдү. Эйлер кәсри ики натурал әдәдин нисбәти һесаб этдийиндән дейирди ки, $\frac{a}{b}=\frac{an}{bn}$ олмасы нисбәтин дәйишмәмәси илә изаһ олунур. Һәмин бәрабәрлийи һәндәси үсулла да изаһ эдирдиләр. Тутаг ки, MN парчасы (бу парча ваһид һесаб эдилир) b бәрабәр һиссәйә (шәкилдә 3 бәрабәр һиссәйә) бөлүнмүшдүр (3-чү шәкил).



3-чү шәкил

Сонра бу һиссәләрин һәр биринин даһа n бәрабәр һиссәйә бөлүндүйүнү фәрз эдәк (шәкилдә $n=2$-дир).

Онда MN парчасы $b\cdot n$ бәрабәр һиссәйә бөлүнәр. Әкәр әввәлки бөлкүләрдән a бөлкү айырсаг ($a=2$ олсун), Mm_2 парчасыны әлдә эдирик, йә'ни $\frac{1}{b}$-дән a дәфә көтүрмәклә Mm_2 парчасы әлдә эдилир.

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{b}\cdot a.$$

Дикәр тәрәфдән Mm_2 парчасынын ени кичик ваһид парчалардан нечәсинә бәрабәр олдуғуну һесабласаг, ени ваһид парчанын һәр бири $\frac{1}{bn}$ олдуғуну вә Mm_2-дә белә парчалардан an дәфә ерләшдийини көрәрик, йә'ни

$$\frac{a}{b}=\frac{an}{bn}$$

олмалыдыр. Эйни гайда илә

$$\frac{a}{b}=\frac{a:m}{b:m}$$

олдуғуну изаһ этмәк олар.

Белә мүлаһизәләр кәсрләрин ашағыдакы хассәләрә малик олдуғуну көстәрир:

1) мәхрәчләри эйни олан кәсрләрдән сурәти бөйүк олан кәср о бириндән бөйүкдүр.

Тутаг ки, $\frac{a_1}{b}$ вә $\frac{a_2}{b}$ кәсрләри верилмиш вә бурада $a_1>a_2$-дир. Һәр һансы бир чохлуғу b бәрабәр һиссәйә бөлүб, бу һиссәләрдән әввәлчә a_1 сайда, сонра a_2 сайда элемент көтүрсәк, чохлуғун $\frac{a_1}{b}$ һиссәсинин $\frac{a_2}{b}$ һиссәсиндән бөйүк олдуғуну билаваситә йәгин этмәк олар. 3-чү шәкилдән $\frac{2}{3}>\frac{1}{3}$ олдуғу айдын көрүнүр, чүнки $Mm_2>Mm_1$.

2) сурәтләри эйни олан ики кәсрдән мәхрәчи кичик олан кәср бөйүкдүр.

Тутаг ки, $\frac{a}{b_1}$ вә $\frac{a}{b_2}$ кәсрләри верилмиш вә бурада $b_1<b_2$-дир. Онда һәмин чохлуғун $\frac{a}{b_1}$ һиссәси $\frac{a}{b_2}$ һиссәсиндән бөйүк олар, чүнки әввәлчә чохлуг кичик һиссәләр, сонра бөйүк һиссәләрә бөлүнәрәк һәр ики һалда һиссәләрдән эйни мигдарда көтүрүлмүшдүр. Мәсәлән, 3-чү шәкилдә $\frac{2}{3}>\frac{2}{6}$-дир, чүнки, $Mm_2>Mm_1$.

3) верилмиш ики вә я бир нечә кәсри ортаг мәхрәчә кәтирмәк олар.

Бунун үчүн һәмин кәсрләрин мәхрәчләринин ән кичик ортаг бөлүнәнини тапмаг лазымдыр.

Тутаг ки,

$$\frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ \cdots;\ \frac{a_n}{b_n}$$

кәсрләри верилмишдир. Бурада $a_1, a_2, \cdots, a_n$ вә $b_1, b_2, \cdots, b_n$ ихтияри натурал әдәдләрдир. Тутаг ки, натурал b әдәди $b_1, b_2, \cdots, b_n$ әдәдләринин ән кичик ортаг бөлүнәнидир. Бу һалда $m_1 b_1=b,\ m_2 b_2=b,\ \cdots,\ m_n b_n=b$-дир.

Белә олдугда

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_1\cdot m_1}{b},\ \frac{a_2}{b_2}=\frac{a_2\cdot m_2}{b},\ \cdots,\ \frac{a_n}{b_n}=\frac{a_n\cdot m_n}{b}$$

эйни мәхрәчли кәсрләр әлдә этмиш оларды.

Инди исә кәсрләр үзәриндә һесаб әмәлләрини өйрәнәк.

Юхарыда кәсрә дә „әдәд" ады вердик. Кәсрләр үзәриндә эдиләчәк әмәлләрин хассәләрилә, натурал әдәдләр үзәриндә эдилән әмәлләрин хассәләри бир-биринә охшадығы үчүн кәсрләрин әдәд олмасы нәтичәсини бир даһа тәсдиг эдир.

1. Кәсрләрин топланмасы

Һәятда һәр аддымда элементләрин (тамын) вә элементин һиссәләринин (тамын һиссәләринин) топланмасы, сайылмасы һадисәсинә раст кәлирик.

Тутаг ки, стол үзәриндә бир нечә бүтөв вә бир нечә доғранмыш алма вардыр. Тутаг ки, бир нечә алма дилими дә ейилмишдир. Алма дилимләриндән һәр биринин бир алманын k бәрабәр һиссәйә бөлүнмәсиндән алындығыны биләрәк (мүмкүндүр ки, алмалар бәрабәр олмаян һиссәләрә дә бөлүнсүн) ейилмәмиш нечә алма галдығыны тә'йин этмәк үчүн стол үзәриндәки алма дилимләрини бүтөв алмаларла бирликдә саймаг лазымдыр. Сайыны тә'йин этмәк истәдийимиз чохлуғун һәр бир элементи (ваһиди) бүтөв бир алма, элементин һиссәләри исә алма дилимләриндән ибарәтдир.

Бүтөв алмалары сайыб, сонра бир-биринә бәрабәр олан алма дилимләрини бирләшдирәрәк даһа нечә бүтөв алма олачағыны тә'йин этдикдән сонра ердә бир алмая тамамланмаян нечә алма дилиминин олдуғуну саймаг лазымдыр.

Тутаг ки, дилимләри бирләшдирдикдән сонра стол үзәриндә m бүтөв алма, бир дәнә ярым алма, n дәнә исә алма дилими галмышдыр ($n < k$ олачағы айдындыр). Стол үзәриндә нә гәдәр алма олдуғуну тә'йин этмәк үчүн $m + \frac{1}{2} + \frac{n}{k}$-ны топламаг лазымдыр.

Онда белә аларыг:

$$m + \frac{1}{2} + \frac{n}{k} = \frac{2mk}{2k} + \frac{k}{2k} + \frac{2n}{2k} =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} + \cdots + \frac{1}{2k}\right)}_{2mk \text{ дәфә}} + \underbrace{\left(\frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} + \cdots + \frac{1}{2k}\right)}_{k \text{ дәфә}} +$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} + \cdots + \frac{1}{2k}\right)}_{2n \text{ дәфә}}.$$

Гейд этмәк лазымдыр ки, биз стол үзәриндәки алмаларын мигдарыны тапмаг үчүн сон язылышда мәсәләни зеһнән һәр бири $2k$-я бәрабәр һиссәйә доғранан алма дилимләринин сайылмасына кәтириб чыхармыш олуруг.

Ашкардыр ки, белә дилимләрдән

$$2mk + k + 2n$$

гәдәр олачагдыр.

Демәли, стол үзәриндә

$$(2mk + k + 2n)\frac{1}{2k} = \frac{2mk + k + 2n}{2k}$$

мигдарда алма вардыр. Нечә бүтөв алма олдуғуну тапмаг үчүн, мәхрәчин сурәтдә нечә там дәфә ерләшдийини тапмаг лазымдыр.

Садәчә бу мәсәләнин һәлли көстәрир ки, верилмиш бир риязи мәсәләни һәлл этмәк үчүн чох вахт мәсәләнин өз ваһидләриндән, билавәситә онун физики шәраитиндән узаглашыб мәсәләни ени ваһидләрдә, башга бир шәраитдә һәлл этмәли олуруг. Белә бир үсул риязийятын кениш имканлара малик олдуғуну, риязи фикрин сәрбәстлийини вә кәмиййәтләрин мүчәррәд маһиййәтини сүбут эдир. Бу садә мисал үзәриндә эйни заманда тамын һиссәләринин (кәсрләрин) нечә топланмасыны да гисмән көстәрдик. Һәмин гайданы үмумиләшдириб эйни мәхрәчли кәсрләрин топланмасына белә тә'риф верә биләрик.

Бәрабәр мәхрәчли кәсрләрин чәми, сурәти һәмин кәсрләрин сурәтләри чәминә, мәхрәчи исә һәмин кәсрләрин мәхрәчинә бәрабәр олан бир кәсрдир, йә'ни

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a+b}{n}$$

олар. Башга сөзлә n бәрабәр ерә бөлүнән бир чохлуғун a гәдәр $\frac{1}{n}$ һиссәсилә, b гәдәр $\frac{1}{n}$ һиссәсинин бирләшмәси о чохлуғун $a + b$ гәдәр $\frac{1}{n}$ һиссәсинә бәрабәр олур. Мәхрәчләри мүхтәлиф олан кәсрләри топламаг үчүн исә әввәлчә бу кәсрләри, мәхрәчләри һәмин кәсрләрин мәхрәчләринин ән кичик ортаг бөлүнәнинә бәрабәр олан кәсрләрә чевирмәк, сонра онлары бәрабәр мәхрәчли кәсрләр кими топламаг лазымдыр. Мәсәлән: $\frac{2}{7} + \frac{1}{3}$-и топламаг үчүн 7 илә 3-үн ән кичик ортаг бөлүнәнини тапырыг. Айдындыр ки, $(7, 3) = 21$. Сонра һәмин кәсрләри ортаг мәхрәчә кәтиририк:

$$\frac{2}{7} = \frac{6}{21};$$

$$\frac{1}{3} = \frac{7}{21}.$$

Она көрә

$$\frac{2}{7}+\frac{1}{3}=\frac{6}{21}+\frac{7}{21}=\frac{6+7}{21}=\frac{13}{21}.$$

олур. Үмумиййәтлә $\frac{a}{b}$ илә $\frac{c}{d}$ кәсрләрини топламаг үчүн әввәлчә b илә d натурал әдәдләринин ән кичик ортаг бөлүнәнини тапырыг.

Тутаг ки, $(b, d)=m$, $\frac{m}{b}=p$, $\frac{m}{d}=q$.

Онда

$$\frac{a}{b}=\frac{ap}{m}, \quad \frac{c}{d}=\frac{cq}{m}$$

олар. Бурадан

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ap}{m}+\frac{cq}{m}=\frac{ap+cq}{m} \qquad (1)$$

алыныр.

(1) формулу кәсрләри топламаг үчүн олан әсас формулдур.

1. Кәсрләри топлама әмәли дә ердәйишмә ганунуна табедир. (1) формулуна әсасланараг кәсрләри топлама әмәлинин ердәйишмә ганунуна табе олдуғуну көстәрмәк олар. Онун үчүн әввәлчә натурал әдәдләри топлама әмәлинин ердәйишмә (коммутативлик) ганунуна табе олдуғуну нәзәрә алмалыйыг.

Айдындыр ки,

$$ap+cq=cq+ap.$$

Буну нәзәрә алсаг (1) формулуна әсасән ашағыдакылары яза биләрик:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{cq+aq}{m}=\frac{cq}{m}+\frac{ap}{m}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$$

алынар.

Демәли, кәсрләри топлама әмәли дә ердәйишмә ганунуна табедир:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}. \qquad (2)$$

Беләликлә, топланан кәсрләрин ери дәйишдикдә онларын чәми дәйишмәз.

2. Кәсрләри топлама әмәли ассосиативлик ганунуна да табедир. Доғрудан да натурал әдәдләри топлама әмәли бу гануна табе олдуғундан

$$\frac{a_1}{b}+\left(\frac{a_2}{c}+\frac{a_3}{d}\right)$$

ифадәсиндә һәмин гануну нәзәрә алмагла кәсрләрин топланмасында да ассосиативлик ганунунун доғру олдуғуну дейә биләрик.

Тутаг ки,

$$(b,\ c,\ d)=m,$$

$$\frac{m}{b}=p,\ \frac{m}{c}=q,\ \frac{m}{d}=t,$$

онда

$$\frac{a_1}{b}+\left(\frac{a_2}{c}+\frac{a_3}{d}\right)=\frac{a_1p}{m}+\left(\frac{a_2\cdot q}{m}+\frac{a_3\cdot t}{m}\right)=$$

$$=\frac{a_1\cdot p}{m}+\frac{(a_2q+a_3t)}{m}=\frac{a_1p+(a_2q+a_3t)}{m}=$$

$$=\frac{(a_1p+a_2q)+a_3t}{m}=\left(\frac{a_1}{b}+\frac{a_2}{c}\right)+\frac{a_3}{d}.$$

Беләликлә кәсрләрин топланмасында ассосиативлик ганунунун доғрулуғу исбат эдилмиш олур:

$$\frac{a_1}{b}+\left(\frac{a_2}{c}+\frac{a_3}{d}\right)=\left(\frac{a_1}{b}+\frac{a_2}{c}\right)+\frac{a_3}{d}. \qquad (3)$$

2. Кәсрләрин чыхылмасы

Биз кәсрләрин чыхылмасында да чохлуғун элементләринин вә элементләрин һиссәләринин һәмин чохлугдан кәнар эдилмәси нөгтейи-нәзәриндә дурачағыг. Тутаг ки, мүәййән элементләрдән вә бу элементләрин һиссәләриндән ибарәт олан A чохлуғу верилмиш вә бу чохлуғун мүәййән элементләриндән вә элементләринин һиссәләриндән ибарәт олан B һиссәсини кәнар этмишик. Бу һалда A-нын галан һиссәси нә гәдәр олур? Бу һиссәни C илә көстәрәк. Айдындыр ки,

$$A=C+B$$

олар. A чохлуғундан онун B һиссәсинин кәнар эдилдийини вә C һиссәсинин галдығыны көстәрмәк үчүн ону $A-B=C$ шәклиндә язырлар. Буну B чохлуғу кәнар эдилмиш A чохлуғуну C илә эйни сайлы кими баша дүшүрүк.

Чохлуғун бүтүн элементләринин вә онларын һиссәләринин һәмин чохлугдан кәнар эдилмәсинин хүсуси әһәмиййәти вардыр. Бу һалда ашкардыр ки, $A-A$ чохлуғу бош чохлуг олачагдыр. Айдындыр ки, бош чохлугда нә бир элемент, нә дә элементләрин һиссәләри олачагдыр. Белә бир суал мейдана чыхыр, чохлуғун элементләрини, эләчә дә элементләринин һиссәләрини вә бу чохлугдан кәнар эдилән мүәййән элементләри эләчә дә һиссәләрини билдикдә, ердә нә гәдәр элемент вә элементләрин һиссәләринин галдығыны тә'йин этмәк мүмкүндүрмү? Бу суала чаваб вермәк үчүн бир мәсәлә һәлл эдәк:

Мәсәлә. $105\frac{3}{4}$ һектарлыг бир тәсәррүфат саһәсинин $53\frac{1}{2}$ һектарында тәрәвәз, галан һиссәсиндә күнәбахан вә гарғыдалы

әкилмишдир. Күнәбахан вә гарғыдалынын әкилдийи саһә нә гәдәрдир?

Демәли, елә бир саһәни тапмаг лазымдыр ки, бу саһәни тәрәвәз әкилән саһә мигдарынын үзәринә кәлдикдә тәсәррүфат саһәсинин мигдарына $\left(105\frac{3}{4}h\right)$ бәрабәр олсун. Онун үчүн $\left(53\frac{1}{2}\right)h=\left(53+\frac{2}{4}\right)h$ язаг. Айдындыр ки, $105\frac{3}{4}h$ алмаг үчүн $\left(53+\frac{2}{4}\right)h$-ын үзәринә $\left(52+\frac{1}{4}\right)h$ кәлмәлийик. Демәли,

$$105\frac{3}{4}h-53\frac{1}{2}h=52\frac{1}{4}h$$

алынар.

Беләликлә чыхма, ики топланандан бири вә топлананларын чәми мә'лум икән икинчи топлананы тапма әмәлидир. Бурада чәмә *азалан* $\left(\text{юхарыдакы мәсәләдә азалан } 105\frac{1}{2}h\text{-дыр}\right)$, мә'лум топланана *чыхылан* $\left(53\frac{1}{2}h\text{-дыр}\right)$, ахтарылан топланана исә *фәрг* дейилир $\left(52\frac{1}{4}h\text{-дыр}\right)$. Бу дейиләнләри үмумиләшдирсәк беlә нәтичәйә кәлирик: әкәр $\frac{a}{b}$ кәсри A чохлуғунун мигдарыны, $\frac{c}{b}$ кәсри кәнар едилән B чохлуғунун мигдарыны көстәрирсә (мигдары ифадә едән ики кәсри һәмишә ортаг мәхрәчә кәтирмәк олар), $\frac{a}{b}-\frac{c}{b}$ фәрги илә $\frac{c}{b}$-нин чәминин $\frac{a}{b}$ олачағы айдындыр, йә'ни $\frac{a}{b}-\frac{c}{b}$ елә бир кәсрә бәрабәр олмалыдыр ки, ону $\frac{c}{b}$ илә топладыгда $\frac{a}{b}$ алынсын.

Она көрә дә

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{d}{b}$$

олдугда

$$\frac{c}{b}+\frac{d}{b}=\frac{c+d}{b}=\frac{a}{b}$$

алынмалыдыр.

Бурада топлама әмәлинин, чыхма әмәлинә тәрс олдуғу да мейдана чыхыр. Топлама әмәли васитәсилә әввәлки миг-

дар тапылыр. Әләчә дә чыхма әмәли, топлама әмәлинин тәрсидир. Беләликлә, топлама әмәли илә чыхма әмәли гаршылыглы тәрс әмәлләрдир.

Чох вахт мүхтәлиф мәхрәчли кәсрләрин дә чыхылмасы лазым кәлир. Биз буну јухарыдакы мәсәләдә көрдүк. Бүтүн бунлары үмумиләшдирәрәк дејә биләрик ки, ики кәсрин фәргини тапмаг үчүн әввәлчә һәмин кәсрләри ортаг мәхрәчә кәтирмәк, сонра алынан кәсрләри бәрабәр мәхрәчли кәсрләр кими чыхмаг лазымдыр.

Кәсрләрин фәрги ашағыдакы хассәләрә маликдир:

1) азалан чыхыландан бөјүк олмалыдыр;

2) чәми чыхмаг үчүн топлананлары бир-бир чыхмаг олар. Тәрсинә, топлананлары чыхмаг үчүн бу топлананларын чәминин чыхылмасы кифајәтдир. Онун үчүн

$$\frac{a}{b}-\left(\frac{c}{b}+\frac{d}{b}\right)=\frac{a}{b}-\frac{c+d}{b}=\frac{a-(c+d)}{b}=\frac{(a-c)-d}{b}=$$

$$=\frac{a-c}{b}-\frac{d}{b}=\left(\frac{a}{b}-\frac{c}{b}\right)-\frac{d}{b}.$$

Беләликлә,

$$\frac{a}{b}-\left(\frac{c}{b}+\frac{d}{b}\right)=\left(\frac{a}{b}-\frac{c}{b}\right)-\frac{d}{b}. \qquad (4)$$

3) әләчә дә верилмиш әдәди, чәмдән чыхмаг үчүн ону топлананларын бириндән чыхмаг олар;

4) фәрги бир әдәдин үзәринә әлавә этмәк үчүн азаланы топлајыб, чыхыланы чыхмаг олар;

5) фәрги чыхмаг үчүн азаланы чыхыб, чыхыланы топламаг олар.

3. Кәсрләрин вурулмасы вә бөлүнмәси

Кәсри натурал әдәдә вурма

Әввәлчә кәсрин ваһиддән бөјүк олан натурал әдәдә, сонра исә ваһидә вурулмасы һалларыны нәзәрдән кечирәк. Кәсрин натурал әдәдә вурулмасыны натурал әдәдин натурал әдәдә вурулмасы кими, јә'ни вурујанын вурандакы ваһидләри сајы дәфә өз-өзү илә топланмасы кими изаһ едәчәјик:

$$a\cdot n=\underbrace{a+a+\cdots+a}_{n\ \text{дәфә}},$$

јә'ни

$$\frac{a}{n}\cdot k=\frac{a}{n}+\frac{a}{n}+\cdots+\frac{a}{n}=\frac{a+a+\cdots+a}{n}=\frac{ak}{n}.$$

Башга сөзлә, верилмиш кәсри натурал әдәдә вурмаг үчүн кәсрин мәхрәчини дәјишмәјиб сурәтини һәмин натурал әдәд дәфә артырмаг лазымдыр. Биз јухарыда натурал әдәдин ваһидә вә сыфра вурулмасынын тә'рифини вердик.

Әләчә дә бурада

$$\frac{a}{n}\cdot 1=\frac{a}{n}$$

$$\frac{a}{n}\cdot 0=0$$

тә'рифләрини гәбул едәҹәйик.

Кәсри тама бөлмә

Юхарыда ики натурал әдәдин галыгсыз бөлүнмәсини шәрһ едәркән көстәрдик ки, бир натурал әдәди дикәринә бөлмәк, һасил вә вуруглардан бири мә'лум олдугда дикәр вуруғу тапмаг демәкдир.

Бурада ики һал вардыр. Биринҹи һалда ики натурал әдәдин һасили вә вуран мә'лум олдугда вуруланы тапмаг, икинҹи һалда исә һасил вә вурулан мә'лум олдугда вураны тапмаг тәләб едилир.

Биринҹи һалда уйғун олараг кәсрин тама (натурал әдәдә) бөлүнмәси мәсәләләринә дә раст кәлирик. Мәсәлән, $\frac{3}{5}$ m күбрәнин 6 тәсәррүфат саһәси арасында бәрабәр бөлүнмәси тәләб едиләрсә, һәр тәсәррүфат саһәсинә дүшән күбрәни x *кг* илә ишарә едиб, 6 тәсәррүфат саһәсинә дүшән $\frac{3}{5}m$ күбрәнин x-дән 6 дәфә чох олдуғуну нәзәрә алараг

$$x\cdot 6\ кг=\frac{3}{5}\ m=600\ кг$$

шәклиндә яза биләрик.

Натурал әдәдләр саһәсиндә биринҹи һала уйғун олараг

$$x=\frac{600}{6}=100$$

олмалыдыр. Һасил кәср олдугда да ейни бөлмә гайдасы тәтбиг едилмәлидир.

Тутаг ки,

$$x\cdot n=\frac{p}{q}.$$

Бурада да натурал әдәдләр саһәсиндә олдуғу кими

$$x=\frac{p}{q}:n$$

ишарәси ишләдилмәлидир.

Белә бир тәбии суал мейдана чыхыр: о, һансы әдәддир ки, n-ә вурдугдан сонра $\frac{p}{q}$ кәсринә бәрабәр олур? Зеһнән белә бир кәсрин $\frac{p}{q\cdot n}$ олдуғуну тә'йин етмәк чәтин дейилдир.

Доғрудан да,

$$\frac{p}{q \cdot n} \cdot n = \frac{p \cdot n}{q \cdot n} = \frac{p}{q}$$

олар. Демәли,

$$\frac{p}{q} : n = \frac{p}{q \cdot n}$$

гәбул этмәклә биз, вурма вә бөлмә әмәлләринин билдийимиз хассәләринә зидд олмаян ашағыдакы хассәни әлдә эдирик: верилмиш кәсри натурал әдәдә (тама) бөлмәк үчүн һәмин кәсрин сурәтини сабит сахлайыб, мәхрәчини тама вурмаг кифайәтдир.

Белә бир суал да мейдана чыха биләр: кәсри юхарыда көстәрилән гайда илә тама бөләркән онларын чәми вә фәрги пайлама ганунуна табе олурму? Бу суала чаваб верәк:

$$\left(\frac{a}{n} + \frac{b}{n}\right) : m = \frac{a+b}{n} : m = \frac{a+b}{n \cdot m} = \frac{a}{n \cdot m} + \frac{b}{m \cdot n} =$$

$$= \frac{a}{n} : m + \frac{b}{n} : m.$$

Беләликлә,

$$\left(\frac{a}{n} + \frac{b}{n}\right) : m = \frac{a}{n} : m + \frac{b}{n} : m$$

олдуғуну алырыг, йә'ни кәсрләрин чәмини тама бөлмәк үчүн айры-айры топлананлары һәмин тама бөлүб, алынан гисмәтләри топламаг кифайәтдир.

Бу ганун кәсрләрин фәрги үчүн дә өз гүввәсиндә галыр:

$$\left(\frac{a}{n} - \frac{b}{n}\right) : m = \frac{a}{n} : m - \frac{b}{n} : m.$$

Кәсрә вурма

Биз юхарыда натурал әдәди вә кәсри натурал әдәдә вурмаг гайдаларындан бәһс этдик. Инди исә натурал әдәдин кәсрә вә кәсрин кәсрә вурулмасындан бәһс эдәк.

Ашкардыр ки, натурал әдәдин вә кәсрин кәсрә вурулмасында вуруланы, вуранда олан ваһидләрин сайы дәфә өз-өзү илә топланмасы кими тә'йин этмәк мүмкүн дейилдир, чүнки натурал әдәди вә кәсри, кәср дәфә топланан олараг тәкрар этмәк олмур.

Белә бир суал мейдана чыхыр: бәлкә һәятда, мәишәтдә натурал әдәдин вә кәсрин кәсрә вурулмасы һалларына һеч раст кәлмирик?

Мә'лум тамын верилән кәср гәдәр һиссәсинин тапылмасы вә мә'лум кәсрин верилән кәср гәдәр һиссәсини тапмаг кими үмуми мәсәләләр буна чаваб ола биләр.

Мәсәлән, $\frac{p}{q}$ кәсринин $\frac{1}{n}$-ни тапмаг тәләб олунур. Бунун үчүн $\frac{p}{q}$-нү n һиссәйә бөлүб белә һиссәләрдән бирини көтүрмәк лазымдыр.

$$\frac{p}{q} : n = \frac{p}{q \cdot n}$$

Башга сөзлә, мә'лум әдәдин верилән һиссәсини тапмаг үчүн мә'лум әдәди һәмин һиссәйә бөлмәк лазымдыр.

Инди исә $\frac{p}{q}$ кәсринин $\frac{m}{n}$ һиссәсини тапаг. Әввәлчә $\frac{p}{q}$ кәсринин $\frac{1}{n}$ һиссәсини тапыб, йә'ни $\frac{p}{q \cdot n}$-и билиб, сонра һәмин һиссәни m дәфә көтүрмәк лазымдыр. Йә'ни $\frac{p}{q}$ кәсринин $\frac{m}{n}$ һиссәси $\frac{pm}{qn}$-ә бәрабәрдир. Беләликлә, мә'лум кәсрин верилән кәср гәдәр һиссәси, сурәти бу кәсрләрин сурәтләри һасилиндән, мәхрәчи исә һәмин кәсрләрин мәхрәчләри һасилиндән ибарәт олан бир кәсрә бәрабәрдир.

Мә'лум кәсрин верилмиш кәср көстәрән гәдәр һиссәсини тапмаг үчүн олан бу гайда ердәйишмә (коммутативлик) вә ассосиативлик ганунларына табедир. Доғрудан да,

1. Билирик ки,

$$\frac{p}{q} \text{ кәсринин } \frac{m}{n} \text{ һиссәси } \frac{pm}{qn}\text{-дир.}$$

Эйни гайда илә

$$\frac{m}{n} \text{ кәсринин } \frac{p}{q} \text{ һиссәси } \frac{mp}{nq}\text{-дир.}$$

Дикәр тәрәфдән

$pm = mp$, $qn = nq$ бәрабәрликләри доғрудур. Онда (натурал әдәдләр вурма әмәлинә көрә коммутативлик гануна табедир).

$$\frac{p \cdot m}{q \cdot n} = \frac{m \cdot p}{n \cdot q}$$

олур. Демәли, кәсрин верилән кәср көстәрән гәдәр һиссәсини тә'йин етдийимиз әмәл коммутативлик ганунуна табедир.

2. Ассоциативлик ганунунун доғру олдуғуну көстәрәк: $\frac{a}{b}$ кәсринин $\frac{c}{d}$ һиссәсинин $\frac{p}{q}$ һиссәси, ашкардыр ки, $\frac{ac}{bd}$ кәсри-

нин, $\frac{p}{q}$ һиссәсинә, йә'ни $\frac{(ac)\,p}{(bd)\,q}$-йә бәрабәрдир.

Дикәр тәрәфдән $\frac{a}{b}$ кәсринин, $\frac{c}{d}$-нин $\frac{p}{q}$ һиссәси гәдәр һиссәси

$$\frac{a}{b}\left(\frac{cp}{dq}\right)=\frac{a\,(cp)}{b\,(dq)}=\frac{(ac)\,p}{(bd)\,q}$$

кәсринә бәрабәрдир.

3. Инди дистрибутивлик ганунунун доғрулуғуну исбат эдәк.

$\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)$ кәсринин $\frac{p}{q}$ һиссәсинин $\frac{(a+b)\,p}{cq}$ олачағы айдындыр. Бурадан

$$\frac{(a+b)\,p}{c\cdot q}=\frac{ap+bp}{cq}=\frac{ap}{cq}+\frac{bp}{cq}.$$

Сағ тәрәфи нәзәрдән кечирдикдә көрүнүр ки, чәмин биринчи һәдди $\frac{a}{c}$ кәсринин $\frac{p}{q}$ һиссәсинә, икинчи һәдди исә $\frac{b}{c}$ кәсринин $\frac{p}{q}$ һиссәсинә бәрабәрдир.

Верилән кәср гәдәр һиссәси мә'лум олан кәсри тә'йин этмәк үчүн вердийимиз тә'рифи вә онун малик олдуғу әсас хассәләри дәриндән арашдырдыгда көрүрүк ки, верилән әдәдин кәср көстәрән гәдәр һиссәсини тапмаг һәмин әдәди кәсрә вурмаг демәкдир. Мә'лум әдәдин верилмиш кәср гәдәр һиссәсини тапмаг әмәлини *кәсрә вурма* адландыраг. Башга сөзлә, $\frac{a}{b}$ кәсринин, $\frac{c}{d}$ кәсринә һасили $\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)$, $\frac{a}{b}$ кәсринин $\frac{c}{d}$ һиссәсинә бәрабәрдир. Демәли, тә'рифә көрә белә яза биләрик:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Беләликлә, верилмиш ики кәсрин һасили, сурәти бу кәсрләрин сурәтләри һасилиндән, мәхрәчи исә һәмин кәсрләрин мәхрәчләри һасилиндән ибарәт олан кәсрә бәрабәрдир.

Ики кәсрин һасилини, верилмиш кәсрин, верилмиш һиссәсинин тапылмасы әмәли адландырдығымыздан кәсрләрин һасилинин дә, натурал әдәдләрин вә кәсрләрин чәминин табе олдуғу ганунлара табе олачағы айдын олур, йә'ни:

1. $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}$ (вурмада коммутативлик гануну).

2. $\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)\frac{p}{q}=\frac{a}{b}\cdot\frac{p}{q}+\frac{c}{d}\cdot\frac{p}{q}$ (вурмада дистрибутивлик гануну).

3. $\frac{a}{b}\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\frac{p}{q}$ (вурмада ассосиативлик гануну).

Кәсрә бөлмә

Кәсрә бөлмә әмәлинин тә'рифинә кечмәздән әввәл верилмиш әдәдин тәрсинин тә'рифини верәк.

Һасили ваһидә бәрабәр олан ики натурал әдәддән биринә о биринин *тәрси* дейилир.

Натурал n әдәдинин тәрси $\frac{1}{n}$-дир. Доғрудан да, $\frac{1}{n}\cdot n=1$.

$\frac{p}{q}$ кәсринин тәрси $\frac{q}{p}$ -дир. Доғрудан да, $\frac{p}{q}\cdot\frac{q}{p}=1$.

Биз натурал әдәдә вурма әмәлиндән кәсрә вурма әмәлинә кечдикдә бизә мә'лум олан вурма әмәлинин тә'рифи әвәзиндә даһа үмуми олан тә'риф гәбул этдик.

Белә күман эдилә биләр ки, натурал әдәдә бөлмәкдән кәсрә бөлмә әмәлинә кечдикдә дә ени бир тә'риф гәбул этмәлийик. Әслиндә исә ени бөлмә тә'рифинә һеч бир эһтияч йохдур.

Доғрудан да, бөлмә әмәли, һасил вә вуруглардан бири мә'лум олдугда о бири вуруғу тапмаг әмәлиндән ибарәтдир. Белә ки, бу тә'рифдә һасили мә'лум олан ики вуругдан һансынын мәчһул, һансынын там, һансынын кәср олдуғу барәдә һеч бир шәрт верилмир. Она көрә дә:

$$\frac{p}{q}:\frac{c}{d}=x$$

язылышында elә бир x-и тапмаг нәзәрдә тутулур ки, бу x-и $\frac{c}{d}$-йә вурдугда $\frac{p}{q}$ кәсри алынсын, йә'ни

$$x\cdot\frac{c}{d}=\frac{p}{q}$$

олсун.

Бу бәрабәрлийин һәр ики тәрәфини эйни $\frac{d}{c}$ кәсринә вурсаг

$$\left(x\cdot\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{d}{c}=\frac{p}{q}\cdot\frac{d}{c}$$

аларыг.

Вурмадакы ассосиативлик ганунуна әсасән яза биләрик:

$$\left(x\cdot\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{d}{c}=x\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{d}{c}\right)=x\frac{cd}{dc}=x\cdot 1=x.$$

Демәли,

$$\frac{p}{q}:\frac{c}{d}=\frac{p}{q}\cdot\frac{d}{c}$$

олур, йә'ни бир әдәди о бири әдәдә бөлмәк үчүн бөлүнәни бөләнин тәрси олан әдәдә вурмаг лазымдыр.

Дикәр тәрәфдән кәсрин кәсрә бөлүнмәси гайдасыны белә дә изаһ етмәк олар: тутаг ки, һәр һансы бир x әдәдинин $\frac{c}{d}$ һиссәси $\frac{p}{q}$-йә бәрабәрдир, йә'ни $x\cdot\frac{c}{d}=\frac{p}{q}$; x-и тапмаг үчүн $\frac{p}{q}$-нү $\frac{c}{d}$-йә бөлмәк лазымдыр.

x әдәдинин $\frac{c}{d}$ кәсри гәдәр һиссәси $\frac{p}{q}$-дүр, йә'ни x әдәди d гәдәр бәрабәр һиссәйә бөлүнмүш вә белә һиссәләрдән c гәдәр көтүрүләрәк $\frac{p}{q}$ алынмышдыр. Инди x-и тапмаг үчүн $\frac{p}{q}$-нү c-йә бөлүб онун $\frac{1}{d}$ һиссәсини тапмаг, сонра да d-йә вурмаг лазымдыр. $x=\frac{p\cdot d}{q\cdot c}$ алыначагдыр.

Демәли,

$$x\cdot\frac{c}{d}=\frac{p}{q};$$

бурадан

$$x=\frac{p}{q}:\frac{c}{d}=\frac{p\cdot d}{q\cdot c}$$

алыныр.

Үмумиййәтлә кәсрләрин бөлүнмәсини, натурал әдәдләрин бөлүнмәси кими тә'риф етсәк вә кәсрләрин бөлүнмәси натурал әдәдләрин бөлүнмәсинин табе олдуғу хассәләрә малик олса да, кәсрләрин бөлүнмәсинин өзүнә мәхсус хассәләри мөвчуддур.

Бу хассәләр ашағыдакылардыр.

1. Бөлән сыфыр олмадыгда кәсрләр чохлуғунда бөлмә әмәли истәнилән гәдәр ичра едилә биләр. Мә'лум олдуғуна көрә натурал әдәдләр чохлуғунда ики натурал әдәдин гисмәти,

бүтүн һалларда натурал әдәд олмадығы үчүн натурал әдәдләр чохлуғунда бөлмә әмәли һәмишә мүмкүн дейилдир.

Кәсрә бөлмә әмәли исә бөләнин тәрси олан әдәдә вурмагдан ибарәт олдуғу үчүн (бөлән сыфыр олмадыгда) һәмишә ичра эдилә биләр.

2. Натурал әдәдләрин гисмәти натурал әдәд олдугда, гисмәт, бөләнин бөлүнәндә нечә дәфә ерләшдийини вә я бөлүнәнин бөләндән нечә дәфә бөйүк олдуғуну көстәрдийи юхарыда гейд эдилмишдир.

Лакин натурал әдәдләрин гисмәти кәср олдугда гисмәтин, бөлүнәнин бөләндән нечә дәфә бөйүк олдуғуну көстәрдийини сөйләмәк олмаз.

Она көрә дә, бир кәсрин дикәринә бөлүнмәсиндән алынан гисмәти онларын *нисбәти* дейә адландырырлар.

Ики әдәдин нисбәти анлайышы эрамыздан габаг IV—III әсрләрдә тәшәккүл этмишдир.

Нисбәтләр нәзәриййәсинин инкишаф йолларында Шәрг алимләринин, о чүмләдән Азәрбайчан алими Нәсирәддин Тусинин[1] (1201—1274) мүһүм үмумиләшдирмәләри вә ени нәзәриййәләри мөвчуддур. Нисбәтдә иштирак эдән бөлүнәнә нисбәтин әввәлки һәдди, бөләнә исә *нисбәтин сонракы һәдди* дейилир. Мәсәлән, 3:12 нисбәтиндә, әввәлки һәдд 3, сонракы һәдд исә 12-дир.

Бир әдәдин дикәринә нисбәти элә бир әдәдә дейилир ки, бу әдәди нисбәтин сонракы һәддинә вурдугда нисбәтин әввәлки һәдди алыныр. 3-үн 12-йә нисбәти $\frac{1}{4}$ -дир; чүнки $12 \cdot \frac{1}{4} = 3$ олур.

Инди исә бөлмәдә әсас ганунларын доғрулуғуну көстәрәк.

1. Чәмин вә фәргин бөлүнмәсиндә пайлама (ассосиативлик) гануну мөвчуддур.

$$\left(\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b}\right) : \frac{p}{q} = \frac{a \pm c}{b} : \frac{p}{q} = \frac{(a \pm c)\, q}{b \cdot p} = \frac{aq \pm cq}{bp} =$$

$$= \frac{aq}{bp} \pm \frac{cq}{bp} = \frac{a}{b} : \frac{p}{q} \pm \frac{c}{b} : \frac{p}{q}$$

Бурада әввәлләрдә исбат этдийимиз ганунлара әсасланараг бәрабәрлийин сағ тәрәфи $\frac{a}{b}$ -нин $\frac{p}{q}$ -йә нисбәти илә $\frac{c}{b}$ -нин $\frac{p}{q}$ -йә нисбәтинин чәминдән вә фәргиндән ибарәт олдуғу исбат эдилди.

---

[1] Нәсирәддин „Шәклул-Гита“ адлы әсәриндә нисбәтләр нәзәриййәсини инкишаф этдирмишдир.

2. Һасилин кәсрә бөлүнмәси. Исбат этдийимиз хассәләри нәзәрә алараг яза биләрик:

$$\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right):\frac{p}{q}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}:\frac{p}{q}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}\cdot\frac{q}{p}=\frac{(a\cdot c)\cdot q}{(b\cdot d)\cdot p}=\frac{a\cdot(c\cdot q)}{b\cdot(d\cdot p)}=$$

$$=\frac{a\cdot(q\cdot c)}{b\cdot(p\cdot d)}=\frac{(aq)\cdot c}{(bp)\cdot d}=\frac{a\cdot q}{b\cdot p}\cdot\frac{c}{d}=\left(\frac{a}{b}:\frac{p}{q}\right)\cdot\frac{c}{d}.$$

Әләвә дә,

$$\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right):\frac{p}{q}=\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}:\frac{p}{q}\right),$$

йә'ни һасили кәсрә бөлмәк үчүн вуруглардан бирини һәмин кәсрә бөлмәк кифайәтдир.

3. Кәсрин һасилә бөлүнмәси дә эйни гайда илә исбат эдилә биләр.

$$\frac{p}{q}:\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)=\frac{p}{q}:\frac{a\cdot c}{b\cdot d}=\frac{p}{q}\cdot\frac{b\cdot d}{ac}=\frac{p(b\cdot d)}{q(a\cdot c)}=$$

$$=\frac{(p\cdot b)\cdot d}{(q\cdot a)\cdot c}=\frac{pb}{qa}\cdot\frac{d}{c}=\left(\frac{p}{q}:\frac{a}{b}\right):\frac{c}{d}.$$

Әләвә дә,

$$\frac{p}{q}:\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)=\left(\frac{p}{q}:\frac{c}{d}\right):\frac{a}{b},$$

йә'ни әдәди һасилә бөлмәк үчүн һәмин әдәди һасилин вуругларына ардычыл бөлмәк кифайәтдир.

4. Бөлән вә бөлүнәни эйни бир әдәдә вурсаг вә я бөлсәк гисмәт дәйишмәз.

$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$ гисмәтини нәзәрдән кечирәк. Бөлән вә бөлүнәни эйни бир әдәдә вураг:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{p}{q}=\frac{a\cdot p}{b\cdot q};\qquad \frac{c}{d}\cdot\frac{p}{q}=\frac{cp}{dq}.$$

Бу ени әдәдләрин гисмәтини тапаг:

$$\frac{ap}{bq}:\frac{cp}{dq}=\frac{ap}{bq}\cdot\frac{dq}{cp}=\frac{(ap)\cdot(dq)}{(bq)\cdot(cp)}=\frac{a\,(pdq)}{b\,(qcp)}=$$

$$=\frac{a(d\cdot pq)}{b(c\cdot q\cdot p)}=\frac{(a\cdot d)(p\cdot q)}{(bc)\,(pq)}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

§ 3. МӘНФИ ӘДӘДЛӘР

Мәнфи әдәдләр кәсрләрдән чох сонра әмәлә кәлмиш вә тәшәккүл этмишдир. Тарихән мәнфи әдәдләр элмдә иррасионал әдәдләр[1] мә'лум олдугдан чох сонра мейдана чыхмыш вә ишләдилмәйә башланмышдыр. Элмдә мәнфи әдәдләр ики шәкилдә тәзаһүр этмишдир:

1) натурал әдәдләрин фәрги шәклиндә (бурада һәмишә азалан чыхыландан бөйүк көтүрүлмүшдүр);

2) мүстәгил шәкилдә (йә'ни натурал вә кәср әдәдләрдән фәргләнән ени тәбиәтли әдәд кими).

Натурал әдәдләрдән мәнфи әдәдләрә доғру олан инкишаф йолу натурал әдәдләрдән кәсрләрә доғру олан инкишаф йолундан вә бу йолда газанылан тәчрүбәдән чох фәргләнир. Бу чәһәт риязийятда, эйни заманда ики инкишаф хәттини мүәййән эдир. Биринчиси, риязи анлайышларын мүстәгил формада эһтияч үчүндан тәзаһүрү вә инкишафы хәтти (мәсәлән, натурал әдәдләрин сай просесиндән, кәсрләрин исә өлчү просесиндән әмәлә кәлдийи кими). Икинчиси исә, риязийят элминин өз дахили ганунларынын инкишаф хәттидир. Мәнфи әдәдләрин мәншәи вә инкишафы икинчи йолла олмушдур. Тәнликләр һәлли вә һәллин гайдаларындан газанылан тәчрүбә мәнфи әдәдләрин мәнбәи вә мәншәи олмушдур.

Натурал әдәдләр даирәсиндә кичик натурал әдәддән бөйүк натурал әдәди чыхманын мүмкүн олмамасы вә тәнликләр һәлли гайдаларынын үмумиләшдирилмәси мәнфи әдәдләрин мейдана чыхмасынын әсас сәбәбләридир.

Мәнфи әдәдләрин илк изләринә эрамызын IV әсриндә яшамыш юнан риязийятчысы Диофантын әсәрләриндә раст кәлирик. Диофантын яшадығы вахт бизә дүрүст мә'лум дейилдир. Диофантын тәхминән 365-чи илләрә яхын бир заманда Искәндәрийййәдә яшадығыны сөйләмәк олар. Диофантын яшы һаггында белә бир мәсәлә мә'лумдур.

Диофант өмрүнүн алтыда бирини ушаглыгда, он икидә бирини кәнчликдә кечиртмишдир. Эвли икән өмрүнүн өвладсыз кечирдийи еддидә бириндән даһа беш ил сонра бир оғлу олмушдур вә бу оғлан атасынын яшынын ярысына чатдыгда өлмүшдүр. Бундан сонра исә атасы ялныз дөрд ил яшамышдыр[2].

Бу мәсәләнин һәллиндән көрүнүр ки, Диофант 84 ил яшамышдыр. Диофантын һәяты һаггында бу гәдәр мә'лумат вардыр. Диофантын „Һесаб“ адлы әсәри гәдим юнанларын „чәбридир“.

---

[1] Иррасионал әдәдләр һаггында § 6-да мүфәссәл мә'лумат верилир.

[2] Бу мәсәлә, „Anthologia Gracca“ әсәринин эпиграммасыдыр. Әкәр Диофантын яшыны x илә ишарә этсәк, онда Диофантын яшы

$$\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}x+\frac{1}{7}x+5+\frac{1}{2}x+4=x$$

тәнлийинин һәллиндән тапылыр. Бурадан $x=84$.

Диофант һесаб вә чәбр мәсәләләрини һәндәси йолла һәлл етмәйән илк юнан риязийятчысыдыр. О илк дәфә дөрд әмәли, гүввәтә йүксәлтмә вә көкалма әмәлләрини ишләдәрәк һесаблама йолу илә һесаб вә чәбр мәсәләләрини һәлл етмәйә чәһд етмишдир.

Илк дәфә Диофант $(x+1)(x+2)$ һасилини x^2+3x+2 шәклинә кәтирмишдир. О, $(x-1)(x-2)$ һасилини һесаблайыркән „әлавә" едилән вә „чыхылан" әдәди айырараг ашағыдакы гайданы сөйләмишдир. „Ики чыхылан әдәдин һасили әлавә олунан әдәддир, әлавә олунан әдәдин чыхылан әдәдә һасили исә чыхылан әдәддир".

Гейд етмәк лазымдыр ки, Диофант мәнфи әдәди мүстәгил бир әдәд кими дейил, һәмишә азаланы чыхыландан бөйүк фәрз едәрәк фәрг шәклиндә баша дүшүрдү. Белә бир тәбии суал мейдана чыхыр: көрәсән Диофант ишарәләр ганунуну нечә кәшф етмишдир?

Диофант ишарәләр ганунуну фәргләрин вурулмасында ишләтдийинә көрә вурмада һасилин ишарәсини елә сечмишдир ки, икиһәдлини икиһәдлийә вурма гайдасынын (биз инди бу гайданы пайлама вә я дистрибутивлик гануну адландырыг) нәтичәси, әдәди һесабламаларда билаваситә һесабламанын нәтичәси илә ейни олмушдур. Мәсәлән,

$$(x-1)(x-2)=(x-1)\cdot x+(x-1)(-2)=$$
$$=x^2+(-1)x+x(-2)+(-1)(-2);$$

тутаг ки, $x=3$,

онда $(3-1)(3-2)=3\cdot3+(-1)(\cdot3)+3\cdot(-2)+(-1)(-2)$

олур.

Билаваситә һесабладыгда исә $(3-1)(3-2)=2\cdot1=2$ алыныр. Һәмин нәтичәни алмаг үчүн

$$(-1)\cdot3=-3,$$
$$3\cdot(-2)=-6$$
$$(-1)\cdot(-2)=2$$

көтүрмәлийик. Шүбһәсиз ки, Диофант тәкчә бу мисал үзәриндә дейил, чохлу белә һесабламалар апардыгдан сонра вурмада ишарәләр гайдасыны сечә билмишдир.

Диофант бу һесабламаларла янашы „Һесаб" әсәриндә күлли мигдарда бирдәрәчәли гейри-мүәййән тәнликләр вә икидәрәчәли мүәййән тәнликләр һәлл етмишдир. Бунларын ән сәчиййәви чәһәти бурасындадыр ки, һәмин тәнликләрин һәлли гайдалары, бу күнүн һәлл гайдаларындан һеч дә фәргләнмир. Лакин тәнликләри һәлл едиркән Диофант алынан мәнфи, иррасионал вә хәяли көкләри тулламышдыр. Әләчә дә ики мүсбәт көк оланда бирисини сахлайыб, дикәрини атмышдыр. Ейни заманда Диофант аздан чоху чыхмағы мүмкүн һесаб етмирди. Бурадан Дио-

фантын мәнфи әдәдләрә ябанчы бир мүнасибәт бәсләдийи айдын көрүнүр.

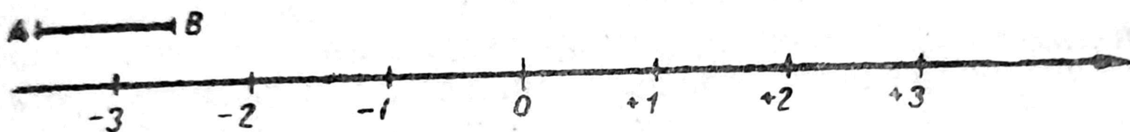
Диофантдан сонра, мәнфи әдәд анлайышынын инкишафында һинд алимләри даһа чәсарәтли аддымлар атмышлар. Диофант кими һинд алимләри дә мәнфи әдәдләрә тәнликләри һәлл этмәк йолу илә кәлиб чыхмышлар. Лакин һиндлиләр тәнликләрин һәллиндә Диофантдан даһа ирәли кетмишләр. Һиндлиләр мәнфи әдәдләрә тәкчә „чыхылан“ кими дейил, мүстәгил, мүчәррәд әдәд кими бахмышлар.

Һиндлиләр VI—XI әсрләрдә мәнфи әдәдләри мәсәләләрин һәллиндә систематик олараг тәтбиг вә тәдгиг этмишләр. Һиндлиләрдә мүсбәт вә мәнфи әдәдләрин, чыхма әмәлинә топлама әмәли кими бахмаға имкан верән хүсуси ишарәләри олмушдур. Мәшһур һинд риязийятчысы Брамагупт (598—660) мәнфи әдәдләр үзәриндә әмәлләр гайдасыны тә'йин этмишдир. О, мәнфи әдәдләри борч, мүсбәтләри исә газанч кими изаһ этмәйә чәһд этмишдир. Она көрә дә бир чох риязийятчылар мәнфи әдәдин мәншәини борч вә газанч мәсәләләринин әдәдләрә кечирилмәсиндә көрүрләр. Бу, әдәдләрин мәншәинин борч мәфһумуна кәтириб чыхаран нәзәриййә көкүндән сәһвдир. Мәнфи әдәдләрин белә изаһы онларын һәятда, мәишәтдә ишләдилмәсиндән сонра мейдана чыхмышдыр. Һиндлиләрин мәнфи әдәдләри борч әламәти кими изаһ этмәләринә бахмаяраг онлар да юнанлар кими мәнфи әдәдләрә мүмкүн олмаян әдәд кими бахмышлар. Диофантдан фәргли олараг һиндлиләр квадрат тәнликләри һәлл эдәркән онун һәр ики көкүнү (бу көк мәнфи оланда белә) тапмаға чалышмышлар. Мәсәлән, сонралар һинд алими Бхаскара (1114-чү илдә анадан олмушдур) шүурлу сурәтдә вә систематик шәкилдә мәнфи әдәдләри квадрат тәнликләрин һәллиндә дүзкүн олараг һесаба алмышлар. Мәсәлән, $x^2-45x=250$ квадрат тәнлийинин һәр ики $x_1=50$ вә $x_2=-5$ көкләрини тә'йин этмиш вә бурадача гейд этмишдир: „Лакин икинчи гиймәти көтүрмәк мүмкүн дейилдир, чүнки мәсәләнин шәртинә мүнасиб дейилдир: адамлар мүчәррәд мәнфи әдәдләри бәйәнмирләр“.

Мәнфи әдәдләрә олан белә лагейд мүнасибәт элмдә узун заман давам этмишдир. Һәтта XVII әсрдә дә мәнфи әдәдләрин ялан олдуғу фикрини ирәли сүрәнләр аз олмамышдыр. Онлар мәнфи әдәдләри “мүтләг“ (мүсбәт) әдәдләрә гаршы гояраг, бунлары об'ектив олмаян әдәд һесаб эдирдиләр. Лакин һадисәләри дәриндән тәһлил этдикдә һәятда, мәишәтдә бир-биринә гаршы дуран вә бир-биринә экс олан кәмиййәтләри фәргләндирмәк лазым кәлмишдир. Белә гаршы-гаршыя вә бир-биринин экси олан кәмиййәтләрә чохлу мисал кәтирмәк олар: кечмиш вә кәләчәк заман, союуглуг вә истилик дәрәчәләри, ики экс истигамәтдә һәрәкәт эдән чисимләрин сүр'әтләри газанч вә зәрәр вә и. а.

Бир-биринә әкс олан кәмиййәтләри фәргләндирмәк әсасында бөйүк франсыз риязиййатчысы Р. Декарт (1596 –1650) өзүнүн „һәндәсә" (1637) китабында мәнфи әдәдләри истигамәтләнмиш парча кими изаһ эдәрәк, аналитик һәндәсәнин әсасыны гойду, Декарт аналитик һәндәсәдә тәнликләрин көкләринә мүәййән бир әйринин абсис оху илә кәсишмәси кими бахыб бир дәфәлик мәнфи вә мүсбәт әдәдләр арасындакы зиддиййәти арадан галдырды.

Бир дүз хәтт көтүрәк вә бу дүз хәтт үзәриндә ихтияри бир нөгтәни (шәкилдә бу нөгтә *O* нөгтәсидир) гейд эдәк (4-чү шәкил). Бу нөгтәйә *башланғыч нөгтәси* дейилир. Дүз хәтт



4-чү шәкил

үзәриндә мүсбәт бир истигамәт тә'йин эдәк, *O*-дан саға доғру истигамәт мүсбәт, сола доғру истигамәт исә мәнфи гәбул эдилмишдир. Сонра ваһид бир AB парчасы гәбул эдәк (4-чү шәкил). Бу парчаны *O*-дан башлаяраг көтүрдүйүмүз дүз хәтт үзәриндә саға вә сола доғру ардычыл олараг айыраг. Саға доғру ардычыл сүр'әтдә айырдыгда ваһид парчанын сағ учу 1, 2, 3 вә с. нөгтәләринә дүшәчәкдир. Саға доғру һәрәкәт истигамәти мүсбәт гәбул эдилдийиндән һәмин нөгтәләрә уйғун олан әдәдләри +1, +2, +3 вә с. илә көстәрәк. Ваһид парчаны дүз хәтт үзәриндә сола доғру айырдыгда исә (һәмин истигамәт мәнфи гәбул эдилмишдир) онун сол учларыны уйғун олараг —1, —2, —3,... әдәдләри илә көстәрәк. Бурада —1, —2, —3,... әдәдләри гиймәтчә ваһид парчанын узунлуғунун 1, 2, 3... вә и. а. мислини, ишарәчә исә һәмин парчаларын „*O*"-дан сола доғру айрылдығыны көстәрир. Беләликлә, әдәд адландырдығымыз бу ахырынчы символлар васитәсилә истигамәтли кәмиййәтләри дә характеризә эдә биләрик. Бу символлары әдәд адландырмаға әсасымыз вардыр. Мәсәлән, 5 манат пулун олмасы илә 5 манат борчун олмасы бир-бириндән әкс истигамәтдә дуран дәлилләрдир. Биз бу дәлилләри тәбиәтчә дә фәргләндирмәлийик. Она көрә дә пулун олмасы дәлилини мүсбәт, олмамасы дәлилини исә мәнфи адландырырыг. Биринин мигдарыны көстәрән әдәдә (пулун олмасына) *мүсбәт*, пулун олмамасыны көстәрән әдәдә исә *мәнфи* дейирик.

Беләликлә, натурал әдәдләрин билаваситә давамы олмагла —1, —2, —3,... әдәдләри алыныр. Бу әдәдләрә дә натурал әдәдләр кими *там әдәдләр* дейилир. Мәнфи там әдәдләрә мүсбәт там әдәдләрин сыфыр нөгтәсиндәки күзкүдә алынан әксләри кими бахмаг олар.

O-дан сола доғру ваһид парчанын нәинки там мисилләрини, эйни заманда бу ваһидин ярысыны, үчдә бирини вә и. а. кими ихтияри кәср һиссәләрини дә айырмаг олар. Беләликлә, $\frac{p}{q}(q>0)$ шәклиндә олан ики там әдәдин (мүсбәт вә я мәнфи) нисбәтини дүз хәтт үзәриндә көстәрмәк олар. Бунун үчүн әввәлчә ваһид парчаны q бәрабәр һиссәйә бөлүб, сонра бу һиссәләрдән p дәнә көтүрмәк вә әкәр p мүсбәт тамдырса бу һиссәләри сағда, мәнфидирсә солда айырмаг лазымдыр.

Үмумиййәтлә, сыфыр, мүсбәт, мәнфи, там вә кәср әдәдләрә бирликдә *расионал әдәдләр* дейилир (расионал әдәдләр һаггында § 4-дә даһа әтрафлы данышылачагдыр). Мәнфи әдәдләрин дахил эдилмәси илә әдәдләр чохлуғу бир даһа кенишләнмиш олду. Һәр бир ени тәбиәтли әдәдләрлә әлагәдар олараг онлар үзәриндә эдилән әсас әмәлләрин тә'рифи дә мүстәсна әһәмиййәтә маликдир. $b>a$ олдугда мәнфи әдәдләрлә янашы

$$(b-a)=-(a-b)$$

олдуғуну да тә'риф кими гәбул эдәк. Белә тә'рифләри гәбул этдикдә эйни заманда мәнфи әдәдләрә гәдәр бизә мә'лум олан әдәдләрин үзәриндә эдилән әмәлләрин табе олдуғу әсас ганунлара да бурада зидд чыхмамалыйыг. Бу ганунлардан бириси дистрибутивлик ганунудур:

$$a(b+c)=ab+ac.$$

Мәнфи әдәдләрин вурулмасында әлә ишарәләр гануну тапмалыйыг ки, һәмин ганун әдәдләр үзәриндә эдилән әмәлләрин табе олдуғу билдиййимиз әсас ганунлара зидд олмайыб, билаваситә онун үмумиләшдирилмәси олсун. Мәсәлән, $(-1)\cdot(-1)=+1$ дейә гәбул этмәлиййик, чүнки башга чүр, йә'ни $(-1)\cdot(-1)=-1$ гәбул этсәк, онда $a=-1$, $b=1$, $c=-1$ көтүрдүкдә,

$$a(b+c)=-1\cdot(1-1)=-1-1=-2$$

алмыш оларыг. Белә олдугда исә дистрибутивлик гануну позулмуш олар, чүнки, дикәр тәрәфдән

$$a(b+c)=-1(1-1)=-1\cdot 0=0,$$

йә'ни $-2=0$ олачагдыр. Бу исә мүмкүн дейилдир. Айдындыр ки, натурал a вә b үчүн $(-a)b$ һасилини $(-a)$ әдәдинин өзү илә b дәфә топланмасы кими тә'йин эдә биләрик:

$$(-a)\cdot b=\underbrace{(-a)+(-a)+\cdots+(-a)}_{b \text{ дәфә}}=-(ab).$$

Лакин $a\cdot(-b)$-ни бу үсулла тә'йин этмәк мүмкүн дейилдир.

Вурмада ердәйишмә ганунунун мәнфи әдәдләрә хас олмасы үчүн

$$a\cdot(-b)=(-b)\cdot a=-(b\cdot a)=-(a\cdot b)$$

гәбул этмәлийик, йә'ни

$$(-1)(+1)=-1, \quad +1\cdot(-1)=-1$$

олмалыдыр.

Ишарәләр ганунуну бу гайда илә тә'риф этмәклә риязийят даһа кениш һадисәләр саһәсиндә тәтбиг олуна билир вә өз һәятилийини сүбут эдир. Белә ки, расионал әдәдләр чохлуғу үзәриндә эдилән әмәлләрә нәинки ассосиативлик, коммутативлик, дистрибутивлик ганунлары формал олараг тәтбиг эдилир, һәм дә $a+x=b$ вә $ax=b$ (бурада $a\neq0$) тәнликләри биргиймәтли һәлл олуна билир. Башга сөзлә расионал әдәдләр чохлуғунда топлама, чыхма, вурма, бөлмә (бөлән сыфыр олмамалыдыр) әмәлләри һүдудсуз олараг апарыла биләр. Расионил әдәдләр үзәриндә апарылан бу әмәлләрин нәтичәсиндә енә дә расионал әдәдләр әлдә эдирик, йә'ни һәмин әмәлләрә көрә расионал әдәдләр чохлуғу гапалыдыр. Белә гапалы әдәдләр чохлуғуна *мейдан* дейилир.

§ 4. РАСИОНАЛ ӘДӘДЛӘР

1. Расионал әдәдләрин хассәләри

Инди исә расионал әдәдләрин даһа этрафлы өйрәнилмәсинә кечәк. Бурада расионал әдәдләрин бир нечә мүһүм хассәләрини тә'риф дейә гәбул эдиб, галан хассәләрини исбат этмәлийик. Башга сөзлә расионал әдәдләр нәзәриййәсини гурмалыйыг.

Биз юхарыда, верилмиш ваһиди q бәрабәр һиссәйә бөлүб онун $\frac{1}{q}$ һиссәсини өлчү ваһиди дейә гәбул этдик. Әкәр өлчәчәйимиз кәмиййәтдә бу ваһид p дәфә ерләширсә, онда һәмин кәмиййәтин өлчүсү $\frac{p}{q}$-йә бәрабәр олур. Риязи фикир инкишафынын сонракы пилләсиндә $\frac{p}{q}$ символу өзүнүн конкрет мәншәиндән узаглашыб, бөйүк мә'на кәсб эдәрәк, даһа кениш мәзмун алмыш вә „әдәд" адландырылмышдыр. Һәр шейдән мүсгабаг бу символ әдәдләрин нисбәти кими гәбул эдиләрәк, мүстәгил бир маһиййәтә саһиб олду вә ики натурал әдәдин нисбәти расионал әдәд адландырылды.

Ики әдәдин нисбәтинин „әдәд" адландырылмасы үчүн әсас, расионал әдәдләр үзәриндә эдилән әмәлләрин натурал әдәдләр үзәриндә эдилән әмәл ганунларына табе олмасыдыр.

Инди исә расионал әдәдләрин бир нечә мүһүм хассәләриндән бәһс эдәк. Бу хассәләрдән бири расионал әдәдләрин һәндәси тәсвиридир. Бу хассә юхарыда расионал әдәдләрин һәндәси тәсвири онларын дахили маһиййәтини, тәнзим гайдасыны ашкара чыхартмаг үчүн әсас васитәдир.

Юхарыда (4-чү шәкил) һәр бир расионал әдәди дүз хәттин мүәййән нөгтәләри илә тәсвир этмәк мүмкүн олдуғуну көстәрдик. Она көрә дә көтүрүлән дүз хәттә *әдәд оху* вә әдәд охунун гейд этдийимиз нөгтәләринә *расионал нөгтәләр* дейилир (биз расионал әдәдлә, расионал нөгтәни эйни мә'нада ишләдәчәйик). Натурал әдәдләр бәһсиндә ики a вә b натурал әдәдләриндән бирисинин дикәриндән бөйүклүк вә кичиклик анлайышындан бәһс этдик. Бу мүгайисәни әдәд оху үзәриндә даһа әяни көрә биләрик. Мәсәлән, $a<b$ олмасы, әдәд оху үзәриндә a нөгтәсинин (йә'ни a натурал әдәдинә уйғун нөгтәнин) b нөгтәсиндән солда ерләшдийини көстәрир. Бу һәндәси тәсвир, ихтияри ики расионал әдәдин мүгайисәси үчүн әсас көтүрүлә биләр. Расионал нөгтәләрин бу гайда илә тә'йин олунан дүзүлүшүнү сахламаг шәртилә онларын чәми, фәрги, һасили, нисбәти арасында бәрабәрсизликләри тә'йин этмәлийик. Бунун үчүн белә бир тә'риф гәбул эдирик.

Әкәр $b-a$ фәрги мүсбәтдирсә, онда дейирик ки, b расионал әдәди a расионал әдәдиндән *бөйүкдүр*. Она көрә дә a илә b нөгтәләри арасындакы расионал нөгтәләр a-дан бөйүк вә b-дән кичик олан нөгтәләрдир. a, b вә бунлар арасындакы бүтүн нөгтәләрә бирликдә *сегмент* вә я *парча* дейилир вә $[a, b]$ кими ишарә эдилир. Ихтияри a нөгтәси илә 0 (башланғыч) нөгтәси арасындакы мәсафә мүсбәт әдәд һесаб эдиләрәк буна a-нын *мүтләг гиймәти* дейилир вә $|a|$ илә ишарә олунур. a әдәдинин мүтләг гиймәти белә тә'йин эдилир: әкәр $a\geqslant 0$ исә онда $|a|=a$; әкәр $a<0$ исә, онда $|a|=-a$ демәкдир.

Айдындыр ки, әкәр a вә b әдәдләринин һәр икиси мәнфи дейилсә, йә'ни $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$ исә, онда $a+b\geqslant 0$ вә $|a+b|=a+b=|a|+|b|$ олар. Әкәр $a<0$, $b<0$ исә онда $a+b<0$ олар. Белә олдугда $|a+b|=-(a+b)=(-a)+(-b)=|a|+|b|$ алынар. Демәли, a вә b эйни ишарәлидирсә, онда һәмишә

$$|a+b|=|a|+|b|$$

олар.

Әкәр a вә b мүхтәлиф ишарәлидирсә, айдындыр ки, $|a+b|\leqslant|a|+|b|$ олар. Мәсәлән, $a=+2$, $b=-5$ оларса,

$$a+b=2-5=-3$$

$$|a+b|=-(-3)=3$$

олар. Дикәр тәрәфдән $|a|=2$, $|b|=-(-5)=5$ олдуғундан

$$|a|+|b|=2+5=7$$

олар. Демәли, бу һалда

$$|a+b|=3<7=|a|+|b|$$

яздығымыз бәрабәрсизлик доғрудур. Айдындыр ки,

$$|a|=|(a-b)+(+b)|\leqslant|a-b|+|+b|;$$

демәли,

$$|a|-|b|\leqslant|a-b|.$$

a-ны b илә әвәз этсәк,

$$|b|-|a|\leqslant|b-a|=|-(a-b)|;$$

бурадан

$$||a|-|b||\leqslant|a-b|$$

алындығы айдындыр.

Бөйүк әһәмиййәти олан белә бир суал мейдана чыхыр: әдәд оху үзәриндә ерләшән расионал әдәдләр бүтүн әдәд оху-ну долдурурму? Бу суала бүтүн тәфәррүаты илә чаваб вермәз-дән әввәл гейд эдәк ки, расионал әдәдләр, әдәд оху үзәриндә һәр ердә сыхдыр.

Расионал әдәдләрин әдәд оху үзәриндә һәр ердә сых олма-сы адланан бу хассәсини белә дүшүнмәлийик: әдәд охунун истәнилән ериндә нә гәдәр кичик бир парча көтүрсәк белә, һәмин парчада һөкмән расионал әдәд вардыр. Тутаг ки, әдәд охунун истәнилән ериндә $[a, b]$ парчасы верилмишдир. Бурада a вә b расионал әдәд вә $b>a$-дыр.

Исбат эдәк ки, һәмин парчада да һөкмән расионал әдәд вардыр.

Гейд эдәк ки, ики расионал әдәдин чәми, фәрги, һасили вә нисбәтинин дә расионал әдәд олдуғуну йохламаг чәтин де-йилдир. Доғрудан да тутаг ки, a вә b ихтияри ики расионал әдәддир. Онда $a=\frac{p_1}{q_1}$, $b=\frac{p_2}{q_2}$ шәклиндә көстәрә биләрик. Белә олдугда тутаг ки, q_1 вә q_2 натурал әдәдләринин ән ки-чик ортаг бөлүнәни q-дүр: $(q_1, q_2)=q$, бундан башга $\frac{q}{q_1}=q_3$, $\frac{q}{q_2}=q_4$-дүр. Онда

$$a\pm b=\frac{p_1}{q_1}\pm\frac{p_2}{q_2}=\frac{p_1q_3\pm p_2q_4}{q};$$

$$a\cdot b=\frac{p_1}{q_1}\cdot\frac{p_2}{q_2}=\frac{p_1\cdot p_2}{q_1\cdot q_2};$$

$$a:b=\frac{p_1}{q_1}:\frac{p_2}{q_2}=\frac{p_1}{q_1}\cdot\frac{q_2}{p_2}=\frac{p_1\cdot q_2}{q_1\cdot p_2}.$$

Бурада $p_1q_3\pm p_2q_4$, p_1p_2, q_1q_2, p_1q_2, q_1p_2 там әдәдләр олду-ғундан $a\pm b$, $a\cdot b$, $a:b$ расионал әдәдләрдир. Бу тәклифин исба-тындан сонра һәр бир $[a, b]$ парчасында да расионал әдәд ол-дуғуну исбат этмәк чәтин дейилдир. Мәсәлән, $\frac{a+b}{2}$ расио-нал әдәдинин ихтияри $[a, b]$ парчасында олдуғуну исбат этмәк олар. Буну исбат этмәк үчүн $\frac{a+b}{2}-a>0$, $b-\frac{a+b}{2}>$ олдуғу-ну исбат этмәк кифайәтдир.

Доғрудан да, $\frac{a+b}{2}-a=\frac{a+b-2a}{2}=\frac{b-a}{2}>0,$

$$b-\frac{a+b}{2}=\frac{2b-a-b}{2}=\frac{b-a}{2}>0.$$

Демәли, $\frac{a+b}{2}$ расионал әдәди $[a, b]$ парчасынын тән ортасындадыр. Бурадан belә бир нәтичә чыхыр: **ихтияри ики расионал әдәдин арасында ени бир расионал әдәд вардыр,** йә'ни расионал әдәдләр әдәд оху үзәриндә һәр ердә сыхдыр. Дейиләнләри екунлашдырсаг, расионал әдәдләрин ашағыдакы хассәләрә малик олдугларыны һөкүм едә биләрик.

Расионал әдәдләрин хассәләриндән үчүнчүсү онларын тәнзим эдилмәсидир. Ики расионал әдәдин бәрабәрлийи онларын әдәд оху үзәриндә эйни бир нөгтәдә ерләшмәси илә тә'йин эдилир. Мәсәлән, $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{2}{4}$, $c=\frac{3}{6}$... расионал әдәдләри, әдәд охунда $[0,1]$ парчасынын, эйни бир там орта нөгтәсидир. Расионал әдәдләрин бәрабәрлийини дә „=" ишарәси илә көстәрәчәйик. Дикәр тәрәфдән расионал әдәдләрин һәндәси тәсвиринә әсасланыб, ики расионал әдәд бөйүк ($>$) вә я кичик ($<$) ишарәси язмаг олар. Бу гайда илә расионал әдәдләр тәнзим эдилир. Дейиләнләри екунлашдырараг расионал әдәдләр ашағыдакы хассәләрә көрә тәнзим эдилир. 1. Ихтияри ики a, b расионал әдәдләри $a=b$, $a>b$, $b>a$ мүнасибәтләриндән ялныз бирисини тә'мин эдир.

2. $a>b$, $b>c$ мүнасибәтләриндән $a>c$ мүнасибәти алыныр (бу хассә кәмиййәтләрин бәрабәрсизлийинин транзитивлик хассәси адланыр).

3. Әкәр $a>b$ оларса, онда элә бир c расионал әдәди вардыр ки,

$$a>c \text{ вә } c>b$$

олур (бу хассә исә расионал әдәдләрин әдәд оху үзәриндә сых олмасы хассәсидир).

„Кичик" анлайышы „бөйүк" анлайышындан төрәйир. Доғрудан да ялныз $b>a$ оларса a расионал әдәди b-дән кичикдир ($a<b$) дейә биләрик. Бу һалда $a<b$ вә $b<c$ исә $a<c$ олар, чүнки бу тәклиф $c>b$ вә $b>a$ олмасы илә эквивалентдир. Она көрә дә $c>a$ олур. Бу исә $a<c$ олмасы демәкдир.

2. Расионал әдәдләр үзәриндә апарылан топлама вә чыхма әмәлләринин хассәләри

Расионал әдәдләри топлама вә чыхма әмәлләринин хассәләриндән бир нечәсини әсас гәбул едәк. Бу хассәләр ашағыдакылардыр:

$$1.\ a+b=b+a.$$

Топлама әмәлиндә буна ердәйишмә хассәси дейилир.

$$2.\ (a+b)+c=a+(b+c).$$

Бу хассәйә ассосиативлик (груплашдырма) хассәси дейилир.

$$3.\ a+0=a$$

4. Һәр бир расионал a әдәдинә көрә элә $(-a)$ расионал әдәди вардыр ки,

$$a+(-a)=0$$

олур.

Бу хассәләрә әсасланараг көстәрәк ки, расионал әдәдләр үзәриндә эдилән топлама әмәлинин тәрси олараг чыхма әмәли еканә гайда илә тә'йин эдилә биләр.

a илә b әдәдләринин фәргини тапмаг башга сөзлә элә бир c әдәдини тапмагдан ибарәтдир ки, бу әдәди b-нин үзәринә кәлдикдә a алынсын, йә'ни

$$b+c=a$$

олсун.

Мәсәлән, тутаг ки, $c=a+(-b)$. Онда

$$b+c=b+[a+(-b)]=b+a+(-b)=$$
$$=a+[b+(-b)]=a+0=a$$

олар.

Демәк көтүрдүйүмүз $c=a+(-b)$ әдәди a илә b-нин фәргиндән ибарәтдир. Белә бир тәбии суал мейдана чыхыр: бәлкә тәсадүфән сечдийимиз $c=a+(-b)$ әдәдиндән башга a илә b расионал әдәдләринин фәргиндән ибарәт олан бир расионал әдәд дә вардыр? Тутаг ки, бу расионал әдәдләриндән ихтияри бириси d-дир.

Онда

$$b+d=a \text{ олмалыдыр.}$$

Бу бәрабәрлийин һәр тәрәфинә $(-b)$ әдәдини әлавә этсәк

$$(b+d)+(-b)=a+(-b)$$

аларыг. Бурадан

$$(b+d)+(-b)=d+[b+(-b)]=d+0=d$$

олдуғундан,

$$d=a+(-b)$$

олмалыдыр, йә'ни a илә b-нин фәрги олан c биргиймәтли тә'йин эдилир. Бу фәрги $a-b$ илә ишарә эдирләр. Фәргин бу гайда илә тә'йин эдилмәсиндән бир сыра хассәләр әлдә эдилир: 3-чү хассәдән айдындыр ки, $0+a=a$ олур, бу исә $0=a-a$ олмасы демәкдир.

Демәк, 3-чү хассәни тә'мин эдән сыфырдан башга бир әдәд йохдур. Бурадан эйни заманда әдәд оху үзәриндә 0-а көрә верилмиш әдәдилә еканә симметрик әдәдин олмасы факты мейдана чыхыр.

Доғрудан да ики әдәдин фәрги еканә тә'йин олундуғундан 3-чү хассәйә әсасән $-a=0-a$ әдәди биргиймәтли тә'йин эдилир.

Эләчә дә $(-a)+a=0$ олдуғундан $a=-(-a)$-дыр. Демәли a илә $(-a)$ әдәди гаршылыглы симметрикдир.
Инди исә

$$-(a+b)=(-a)+(-b)$$

олдуғуну исбат эдәк.

$$(a+b)+[(-a)+(-b)]=a+[b+(-a)+(-b)]=$$
$$=a+[b+(-b)+(-a)]=a+[0+(-a)]=$$
$$=a+[(-a)+0]=a+(-a)=0$$

олдуғундан

$$-(a+b)=(-a)+(-b)$$

олмалыдыр.

Инди исә $a>b$, $a-b>0$ олмасы фактындан $-a<-b$ чыхдығыны исбат эдә биләрик:

$$a-b=a+(-b)=(-b)+a=(-b)+[-(-a)]=$$
$$=(-b)-(-a)$$

Бурадан $(-b)-(-a)>0$ олдуғу айдындыр. Белә олдугда $(-b)>(-a)$ вә я $(-a)<(-b)$ олачагдыр. Хүсуси һалда $a>0$ олмасы фактындан $-a<0$ олдуғу билаваситә айдын олур. Инди исә $a>b$, $c>d$ бәрабәрсизликләриндән истифадә эдиб $a+c>b+d$ олдуғуну көстәрмәк олар. Доғрудан да $a>b$-дән $a+c>b+c$ олдуғу айдындыр. $c>d$ олдуғуна көрә исә $c+d>d+b$ бәрабәрсизлийи әлдә эдилир. Бәрабәрсизликләрин транзитивлик ганунуна көрә $a+c>d+b$ олмалыдыр. Бу исә эйни адлы бәрабәрсизликләри (йә'ни я $>$ вә я $<$ олан ики бәрабәрсизлийи) тәрәф-тәрәфә топлама гайдасыны ифадә эдир.

3. Расионал әдәдләр үзәриндә эдилән бөлмә вә вурма әмәлләринин хассәләри

Юхарыда расионал әдәдләр үзәриндә эдилән вурма вә бөлмә әмәлләринә аид ашағыдакы хассәләрин олдуғуну мүәййән этдик. Ики расионал a, b әдәдләринә көрә бу әдәдләрин һасили адланан үчүнчү бир расионал әдәд $(a \cdot b)$ һәмишә мөвчуддур вә ашағыдакы хассәләрә маликдир:

1. $a \cdot b = b \cdot a$ (вурманын ердәйишмә хасс .

2. $(ab)c = a(bc)$ (вурманын груплашдырма вә я ассосиативлик хассәси).

3. $a \cdot 1 = a$ (бүтүн расионал әдәдләрә көрә 1-ин хассәси).

4. Сыфырдан фәргли олан һәр бир расионал a әдәдинә көрә элә $\frac{1}{a}$ әдәди (a-нын тәрси адланан әдәд) вардыр ки, $a \cdot \frac{1}{a}=1$ олур. Вурманын тәрси олан бөлмә әмәли вурма әмәлинин хас-

сәләри әсасында тә'йин эдилир. a вә b әдәдләринин гисмәти ($b \neq 0$) $c \cdot b = a$ вә я 1-чи хассәйә көрә $b \cdot c = a$, мүнасибәтини өдәйән c әдәдинә дейилир.

Бурада һәр шейдән габаг ики ихтияри a илә b ($b \neq 0$) әдәдләринин гисмәти адланан үчүнчү c әдәдинин варлығы вә еканәлийи кими мәсәләләр мейдана чыхыр.

$c = a \cdot \frac{1}{b}$ әдәдини көтүрәк. Онда

$$c \cdot b = \left(a \cdot \frac{1}{b}\right) \cdot b = a \left(\frac{1}{b} \cdot b\right) = a \cdot 1 = a.$$

Демәли, сечдийимиз $c = a \cdot \frac{1}{b}$ әдәди a илә b әдәдләринин гисмәтидир.

Белә бир суал ортая чыхыр: бәлкә $a \cdot \frac{1}{b}$ әдәдиндән башга a илә b-нин гисмәти адланан дикәр бир d әдәди дә мөвчуддур? Тутаг ки, a илә b-нин гисмәти ихтияри d-дир. Онда $d \cdot b = a$ олмалыдыр. Бу бәрабәрлийин һәр ики тәрәфини $\frac{1}{b}$ әдәдинә вурсаг,

$$(d \cdot b) \cdot \frac{1}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$$

аларыг. Сол тәрәфи айрыча көтүрсәк, 2, 3, 4-чү хассәләрә көрә

$$(d \cdot b) \cdot \frac{1}{b} = d \cdot \left(b \cdot \frac{1}{b}\right) = d \cdot 1 = d.$$

Бу гайда илә, $d = a \cdot \frac{1}{b}$ олдуғуну исбат этмиш оларыг.

Демәли, $a \cdot \frac{1}{b}$ әдәди a илә b-нин ($b \neq 0$) еканә гисмәтидир.

Ики расионал әдәдин гисмәтинин биргиймәтлилийиндән, 3-чү хассәни өдәйән 1-ин еканә олдуғу айдын олур.

Әләчә дә бурадан һәр бир әдәдин (сыфыр мүстәсна олмагла) бир дәнә тәрс әдәди олдуғу билаваситә айдын олур, чүнки 1 илә a-нын биргиймәтли гисмәти $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$ шәртиндән тә'йин эдилир.

Бурадан эйни заманда a илә $\frac{1}{a}$-нын гаршылыглы тәрс олдуглары да айдындыр.

5. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (пайлама вә я диструбутивлик хассәси). Биз юхарыда (§ 1-дә) вурма илә топлама әмәлләринин

пайлама хассәсини дә тә'йин этмишдик. Инди (эләчә дә әввәлдә) бу хассәдән

$$(a-b)\cdot c=a\cdot c-bc$$

олдуғуну көрмәк чәтин дейилдир.

Доғрудан да, 5-чи хассәйә көрә

$$(a-b)\cdot c+b\cdot c=[(a-b)+b]\cdot c=\{a+[(-b)+b]\}\cdot c=$$
$$=[a+0]\cdot c=a\cdot c$$

алырыг. Демәли, $(a-b)\cdot c$ әдәди $a\cdot c$ илә $b\cdot c$ әдәдләринин фәргиндән ибарәтдир, йә'ни $(a-b)\cdot c=a\cdot c-b\cdot c$ олмалыдыр.

Бу хассәдән истифадә эдәрәк расионал әдәдин сыфра вә сыфрын расионал әдәдә һасилинин сыфра бәрабәр ($b\cdot 0=0\cdot b=0$) олдуғуну да исбат эдә биләрик. Доғрудан да 5-чи хассәйә көрә

$$(a+0)\cdot b=a\cdot b+0\cdot b$$

олмалыдыр.
Дикәр тәрәфдән $(a+0)\cdot b=a\cdot q$ олдуғундан, $a\cdot b=a\cdot b+0\cdot b$ олмалыдыр, йә'ни $0\cdot b=a\cdot b-a\cdot b=0$ олмалыдыр. Дикәр тәрәфдән 1-чи хассәйә көрә $b\cdot 0=0\cdot b=0$ олур. Тәрсинә, әкәр $a\cdot b=0$ вә $b\neq 0$ исә онда $a=0$ олмалыдыр, чүнки $a=\frac{0}{b}$ олдуғундан вә эләчә дә $0=\frac{0}{b}$ (чүнки $0\cdot b=0$) олдуғундан гисмәтин биргиймәтлилийинә көрә $a=0$ олмалыдыр.

Инди исә расионал әдәдләрин бәрабәрсизликләринин бир нечә хассәсини ашкар эдә биләрик.

6. Әкәр $a>b$ вә $c>0$ исә, онда $a\cdot c>b\cdot c$ олмалыдыр (бу хассәни билаваситә әдәд оху үзәриндә, һәндәси үсулла йохламаг олар).

Әкәр $a>0$ вә $b>0$ исә, $a\cdot b>0$ олдуғу билаваситә көрүнүр. Инди

$$(-a)\cdot b=-(a\cdot b)$$

олдуғуну исбат эдәк. Доғрудан да 5-чи хассәйә көрә

$$a\cdot b+(-a)\cdot b=[a+(-a)]\cdot b=0\cdot b=0.$$

Демәли, $(-a)\cdot b=0-(a\cdot b)=-(ab)$ олмалыдыр.

Инди исә $a<0$ вә $b>0$ олдугда $a\cdot b<0$ олдуғуну исбат эдәк. Ашкардыр ки,

$$a=-|a|,\quad b=|b|$$

олачагдыр. Бурадан индичә исбат этдийимиз хассәйә көрә

$$a\cdot b=(-|a|)|b|=-(|a|\cdot|b|)<0.$$

алырыг.

Әкәр $a>0$ вә $b<0$ оларса, енә дә $ab<0$ олар, чүнки $a=|a|$, $b=-|b|$ шәртиндән истифадә эдиб, эйни гайда илә

$$a\cdot b=b\cdot a=(-|b||a|)=-(|b||a|)<0$$

алмаг олар.

Әкәр $a<0$, $b<0$ олдугда $a\cdot b>0$ олар. Доғрудан да $a=-a$ $b=-|b|$ олдуғундан

$$a\cdot b=(-|a|)\cdot(-|b|)=-[|a|\cdot(-|b|)]=-[(-|b|)\cdot(|a|]=$$
$$=-[-(|b|\cdot|a|)]=|b||a|>0$$

алыныр.

Биз бурада расионал әдәдләрин 1—5 хассәләринә әсасланараг бир чох ени вә әввәлләрдә гәбул этдийимиз әсас хассәләри мәнтиги сурәтдә алдыг.

Бунлардан: $a=-(-a)$; $a>0$ олдугда $-a<0$ олмасы; фәргин, гисмәтин, 1-ин, 0-ын биргиймәтлилийи $(-a)\cdot b=-(a\cdot b)$ олмасы вә ән нәһайәт вурмада ишарә гайдасынын чыхарылышыдыр, йә'ни: a илә b мүхтәлиф ишарәли олдугда $a\cdot b$ һасилинин мәнфи, эйни ишарәли олдугда исә ab-нин мүсбәт олмасыдыр.

§ 5. ОНЛУГ КӘСРЛӘРИН МӘНШӘИ ВӘ ТӘШӘККҮЛҮ

Натурал әдәдләрин язылышында вә дейилишиндә онлуг сай системинин бөйүк әһәмиййәти олдуғу кими, кәсрләрин дә мәхрәчләри он вә онун гүввәтиндән ибарәт олан кәсрләр васитәсилә көстәрилмәсинин чох әһәмиййәти вардыр.

Онлуг сай системиндә натурал әдәдләрин язылыш вә дейилишиндә газанылан зәнкин тәчрүбәдән сонра кәсрләрин, мәхрәчләри он вә онун гүввәтләриндән ибарәт олан кәсрләрлә (белә кәсрләрә онлуг кәср дейилир) ифадә эдилә билмәси, риязи фикрин гаршысында билаваситә чох гәдим заманлардан дурмушса да, мәхрәчләри 60 вә 60-ын гүввәтләриндән ибарәт олан кәсрләр (алтмышлыг кәсрләр), онлуг кәсрләрдән даһа әввәл ишләдилмишдир. Бунун сәбәбини гисмән юхарыда изаһ этдик. Әлдә олан мә'лумата көрә Яхын Шәрг вә Орта Асия алимләри, XIV—XV әсрләрдә астрономия саһәсиндә апарылан һесабламаларда онлуг кәсрләр ишләтмишләр.

Сәмәргәнд рәсәдханасынын рәиси Әл Каши (Әл Кашани)[1] кәср әдәдләрин ени шәклини, йә'ни онлуг кәсрләри кәшф эт-

---

[1] Гиясәддин Чәмшид Каши (Чәмшид ибн Мәс'уд ибн Мәһмуд) XV әсрин риязийятчысы вә астроному олмуш вә Улуғ-бәйин „Улдуз каталогунун" язылмасында иштирак этмишдир. Эһтимал эдилдийинә көрә 1436-чы илдә вәфат этмишдир. Гиясәддинин ән бөйүк вә элми чәһәтдән ән диггәтәшаян ишләриндән бири π—әдәдинин чох дәгиг гиймәтини тапмасыдыр:

$$\pi=3{,}14159...$$

Ашағыдакы формулу да Гиясәддин Кашани вермишдир:

$$\Sigma n^4=\left(\frac{-1+\Sigma n}{5}+\Sigma n\right]\cdot\Sigma n^2.$$

π һаггында этрафлы мә'лумат алмаг истәйәнләр академик З. И. Хәлиловун „Даирәнин квадратурасы" адлы китабына баха биләр.

мишдир. Онун бу вə башга саһəдə тəдгигаты „Һесабын ачары“ адланан[1] китабында топланмышдыр.

Əл Кашидəн 150 ил сонра, Авропада Стевин[2] онлуг кəсри мүнтəзəм шəкилдə ишлəтмишдир.

Стевин һесаб əмəллəрини онлуг кəсрлəрə тəтбиг этмишдир. Онлуг кəсрин ишарəлəндирилмəси мүхтəлиф мəрһəлəлəр кечмишдир. Стевин бизим инди ишлəтдийимиз веркүл əвəзиндə даирəчик ишлəдир вə һəр онлуг ишарəсинин янында даирə чəкəрəк онун ичəрисиндə һəмин ерин нөмрəсини язырды.

Сонралар онлуг кəсрдə, тамы онлуг һиссəдəн айырмаг үчүн тамын үстүндə „0“ ишарəси гоюлмуш, даһа сонра онлуг һиссəлəри айырмаг үчүн тире ишарəси ишлəдилмишдир.

XVI—XVII əсрлəрдə белə онлуг кəсрлəри мүхтəлиф шəкилдə ишлəдирдилəр.

Тамы онлуг һиссəлəрдəн айырмаг үчүн веркүл ишарəсини илк дəфə Исвечрəли Бюрки (1552—1632), алман астроному Кеплерə (1571—1630) яздығы мəктубунда ишлəтмишдир. О, веркүлдəн сонра кəлəн онлуг ишарəлəринин янында, даирə чəкəрəк онун ичəрисиндə һəмин ерин нөмрəсини язмышдыр.

Онлуг һиссəлəрини тамдан айыран вə һазырда ишлəтдийимиз веркүл ишарəси Кеплерин гəбул эдиб ишлəтдийи мүкəммəл ишарəдир.

Һазырда вə кечмишдə Болгарыстанда вə бə'зи гəрб өлкəлəриндə тамла онлуг һиссəлəрини бунларын арасында, ортада язылан нөгтə илə айырырлар. Белə ишарəнин əлверишли олмамасы айдындыр.

Инди исə онлуг кəсрлəр нəзəриййəсиндəн бəһс эдəк.

Онлуг кəсрлəр нəзəриййəси

Тамын 10, 100, 1000, ..., $\underbrace{100000}_{n \text{ сыфыр}}$ ... эдəдлəринə бөлүнмəси истəр ени тəбиəтли эдəдлəрин тапылмасында, истəрсə билдийимиз эдəдлəрин тəбиəтинин өйрəнилмəсиндə мүстəсна əһəмиййəтə маликдир.

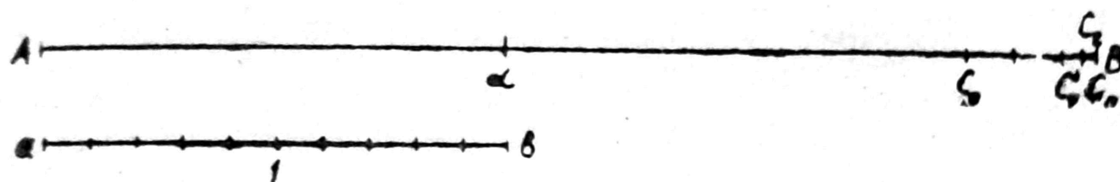
Тутаг ки, мүəййəн AB парчасыны (буну α илə ишарə эдəк) ваһид парча адландырдығымыз $ав$ парчасы илə (бу парчаны 1 илə көстəрəк) өлчмəк тəлəб олунур (5-чи шəкил).

---

[1] Профессор В. А. Розенфелд тəрəфиндəн Əл Кашинин һəмин китабынын рус дилинə эдилəн тəрчүмəси Москвада Техники-Нəзəри Дөвлəт нəшриййатында чап эдилмишдир. Бу тəрчүмəнин ахырында китабын əрəбчə əл язысынын фото сурəтлəри вə рус дилинə тəрчүмəйə верилəн комментарилəр чап эдилмишдир. Китабын бир гисми 1427-чи илдə, о бири гисми тəхминəн бир аз габаг язылмышдыр.

[2] Симон Стевин (1548—1620) Фламанд мүһəндиси вə алимидир.

Тутаг ки, ваһид парча AB парчасында p дәфә там ерләшир вә әлавә C_0B артыг галыр (C_0B-йә биринчи галыг ады верәчәйик). Айдындыр ки, C_0B парчасы $ав$-дән гысадыр. Бурада p әдәди AB-нин тәгриби узунлуғу көтүрүләрсә C_0B узунлуғу



5-чи шәкил

гәдәр хәта этмиш оларыг. Даһа дәгиг өлчмәк үчүн ваһид парчаны 10 бәрабәр һиссәйә бөләрәк онун бир һиссәси $\left(\frac{1}{10}\right)$ илә C_0B парчасыны өлчәк. Тутаг ки, ваһид парчанын $\frac{1}{10}$-и C_0B-дә p_1 дәфә там ерләшир вә C_1B парчасы артыг галыр (икинчи галыг).

Демәли, AB парчасынын тәгриби узунлуғу

$$p+\frac{p_1}{10}$$

олачагдыр.

Шәклин өзүндән айдындыр ки, AB парчасынын индичә тә'йин этдийимиз узунлуғу (бу узунлуг AC_1-ин узунлуғуна бәрабәрдир), әввәлчә тә'йин этдийимиз узунлуғундан (AC_0-ын узунлуғундан) даһа дәгигдир (чүнки $AC_0 < AC_1 \leqslant AB$). Әкәр $\frac{1}{10}$-ләр C_0B-дә p_1 там дәфә ерләшсәйди вә галыг алынмасайды онда AB парчасынын узунлуғу дәгиг тә'йин эдиләрәк

$$p+\frac{p_1}{10}$$

оларды. Бу әдәди p, p_1 кими язмағы шәртләшәк (охуянда дейирик: p там, онда p_1).

Айдындыр ки $p_1 \leqslant 9$, чүнки әкәр $p_1 = 10$ дәнә $\frac{1}{10}$ ваһиддән ибарәт олсайды, онда $ав$ ваһид парчасы C_0B-дә бир там дәфә ерләшәрди вә белә олдугда AB-нин дәгиг узунлуғу $p+1$ оларды.

Инди C_1B парчасынын галыг алындығы һалыны нәзәрдән кечирәк. AB парчасыны даһа дәгиг өлчмәк үчүн C_1B парчасы үзәриндә *ав* ваһид парчасынын $\frac{1}{100}$ һиссәләрини айыраг. Тутаг ки, бу һиссә C_1B-дә p_2 дәфә ерләшир.

Енә дә ики һал ола биләр. Биринчи дәфә $\frac{1}{100}$ ваһид парчасы C_1B-дә там дәфә ерләшәр, икинчи һалда исә p_2 дәфә там ерләшәр вә әлавә C_2B парчасы гәдәр галыг (үчүнчү галыг) алынар.

Биринчи һалда AB парчасынын дәгиг узунлуғу

$$p+\frac{p_1}{10}+\frac{p_2}{100}$$

әдәдинә бәрабәр олачагдыр.

Икинчи һалда исә бу әдәд AB-нин узунлуғуну тәгрибән ифадә едәчәкдир. Бу сонунчу әдәди

$$p,\ p_1\, p_2$$

шәклиндә ишарә едәк (бу p там йүздә $p_1\, p_2$ дейә охунур). Бу әдәд AB парчасынын икинчи, даһа дәгиг узунлуғуну ифадә едир. Айдындыр ки,

$$p_2 \leqslant 9$$

олачагдыр, чүнки $p_2 = 10$ олса иди, онда C_1B-дә 10 дәфә $\frac{1}{100}$ ваһид ерләшәрди, йә'ни бир $\frac{1}{10}$ ваһид ерләшәрди.

Белә олса иди AB парчасынын дәгиг узунлуғу

$$p,\ p_1+1$$

ваһид оларды.

Инди тутаг ки, ваһид парчанын $\frac{1}{100}$-и C_1B-дә p_2 дәфә ерләшир вә C_2B галығы алыныр. Белә олдугда *b* парчасыны 1000 бәрабәр һиссәләрә бөлүб, ваһид парчанын $\frac{1}{1000}$ һиссәсини C_2B үзәриндә айырмаг лазымдыр.

Тутаг ки, бу парча C_2B-дә p_3 дәфә ерләшир. Әкәр һәмин өлчмә нәтичәсиндә галыг алынмазса, онда AB парчасынын дәгиг өлчүсүнү

$$p+\frac{p_1}{10}+\frac{p_2}{100}+\frac{p_3}{1000}$$

әдәди васитәсилә ифадә етмәк олар. Бу әдәди

$$p,\ p_1\, p_2\, p_3$$

шәклиндә язмағы шәртләшәк (p там миндә p_1 p_2 p_3 дейә охунур). Әкәр бу ахырынчы өлчмә нәтичәсиндә енә дә галыг алынарса, өлчү ваһидини даһа кичик (он миндә бир, йүз миндә бир вә и. а.) һиссәләрә бөлүб галығы һәмин кичик һиссә илә өлчә биләрик.

Беләликлә, өлчүнүн дәгиглийини һүдудсуз артырмаг олар. Ваһидин $\frac{1}{10^n}$ һиссәси васитәсилә алынан $C_{n-1}B$ галығыны (n-чи галығы) өлчсәк, енә дә ики һала тәсадүф эдәчәйик. Биринчи һал ваһидин $\frac{1}{10^n}$ һиссәси, алынан $C_{n-1}B$ галығында там ерләшдийи һалдыр ки, бу һалда AB-нин узунлуғу алынан p, p_1 $p_2 \dots p_n$ онлуг кәсри илә ифадә эдиләчәкдир. Икинчи һалда исә C_nB галығы алына биләр. Бу һал әкәр n-ин артмасы илә давам эдәрсә, онда AB парчасынын узунлуғуну онлуг һиссәләринин сайы сонлу олан һеч бир онлуг кәсрдә ифадә этмәк мүмкүн олмур. Белә олдугда онлуг кәсрә *сонсуз онлуг кәср* дейилир вә

$$p = \frac{p_1}{10} + \frac{p_2}{10^2} + \dots + \frac{p_n}{10^n} + \dots$$

вә я

$$p,\ p_1\ p_2 \dots p_n \dots$$

шәклиндә язылыр. Әкәр бу просес n-ин бир гиймәтиндә даянар вә ваһид парчанын $\frac{1}{10^n}$ һиссәси сонунчу галыгда там дәфә ерләшәрсә, онда AB парчасынын узунлуғу сонлу

$$p + \frac{p_1}{10} + \frac{p_2}{10^2} + \dots + \frac{p_n}{10^n}$$

вә я

$$p,\ p_1\ p_2 \dots p_n$$

онлуг кәсри илә ифадә эдиләчәкдир.

Өлчү просесиндә һәр ики һала тәсадүф эдилир. Мәсәлән, тутаг ки, парчанын узунлуғу $5\frac{3}{4}$ ваһидә бәрабәрдир. Онда

$$5\frac{3}{4} = 5\frac{75}{100}$$

олачагдыр, йә'ни парчанын узунлуғу сонлу

$$5\frac{3}{4} = 5{,}75$$

онлуг кәсрилә ифадә эдиләчәкдир. Парчанын узунлуғу $2\frac{1}{3}$ ваһид олдугда исә өлчүнүн нәтичәси

$$2{,}33\ .\ .\ .\ 3\ .\ .\ .$$

сонсуз онлуг кәсрдән ибарәт олачагдыр. Доғрудан да, әкәр $2\frac{1}{3}$-и ифадә эдән сонлу онлуг кәсрдирсә, онда узунлуғу $\frac{1}{3}$ олан галыгда ваһидин $\frac{1}{10^n}$ һиссәси сонлу дәфә ерләшәрди, йә'ни n-ин мүәййән гиймәтиндә элә бир b әдәди олмалыдыр ки,

$$\frac{1}{3}=\frac{b}{10^n}$$

олсун, йә'ни $10^n = 3b$ олмалыдыр. Бу исә мүмкүн дейилдир, чүнки һеч бир n үчүн 3 әдәди 10^n-ин бөләни дейилдир. Демәли, узунлуғу $2\frac{1}{3}$ ваһид олан парчанын узунлуғу сонлу онлуг кәсрлә ифадә эдилә билмәз.

Инди мүһакимәмизин әввәлинә гайыдаг. Верилмиш AB парчасыны өлчү ваһиди адландырдығымыз парча васитәсилә өлчдүкдә, өлчү просеси нәтичәсиндә бойлары кет-кедә кичилән C_1B, C_2B, . . ., C_nB, . . . галыг парчалар алынырды. Белә ки, n артдыгча бу парчаларын сол учлары олан C_n нөгтәләри сағa доғру ирәлиләйирди. Она көрә дә AC_n парчасы n-ин мүәййән гиймәтиндән сонра я AB илә үст-үстә дүшмәли вә я кафи гәдәр AB-йә яхын олмалыдыр.

Бурадан зеһни олса да, белә нәтичә чыхартмаг олар ки, верилмиш парчаны, верилмиш ваһид парча васитәсилә өлчмәк үчүн өлчү просесини бә'зи һалларда гейри-мәһдуд давам этдирмәк лазым кәлир. Бунун да нәтичәсиндә n сонсуз оларaг артдыгча парчанын узунлуғу, онун ардычыл тәгриби гиймәтләринин *яхынлашдығы узунлуг дейә* тә'риф эдилир. Она көрә сонсуз онлуг кәсрләринин өйрәнилмәсинин мүстәсна әһәмиййәти вардыр.

Расионал әдәдләри ифадә эдән онлуг кәсрләрә көрә онлары ики гисмә айырмаг мүмкүндүр. Биринчи гисмә сонлу онлуг кәсрләрлә ифадә эдилән расионал әдәдләри, икинчи гисмә исә сонсуз онлуг кәсрләрлә ифадә эдилән расионал әдәдләри аид этмәк олар.

Мәсәлән,

$$\frac{3}{4}=0{,}75,\quad \frac{7}{5}=1{,}4 \text{ вә и. а.}$$

расионал әдәдләри биринчи гисмә аиддир.

Үмумиййәтлә десәк, бүтүн сонлу онлуг кәсрләр расионал әдәдләрдир, йә'ни һәр бир сонлу онлуг кәср $\frac{p}{q}$ шәклинә кәтирилә биләр. Белә ки, бурада $q=10^n$-дир.

Доғрудан да, тутаг ки,

$$p_0, p_1 p_2 \ldots p_n$$

ихтияри онлуг кәсрдир. Айдындыр ки,

$$p_0, p_1 p_2 \ldots p_n = p_0 + \frac{p_1}{10} + \frac{p_2}{10^2} + \ldots + \frac{p_n}{10^n} =$$

$$= \frac{10^n \cdot p_0 + 10^{n-1} \cdot p_1 + 10^{n-2} \cdot p_2 + \ldots + p_n}{10^n}$$

шәклинә кәтирилә биләр. Бу һалда

$$10^n \cdot p_0 + 10^{n-1} \cdot p_1 + 10^{n-2} \cdot p_2 + \ldots + p_n$$

натурал әдәдини p илә ишарә етсәк

$$p_0, p_1 p_2 \ldots p_n = \frac{p}{10^n}$$

олдуғуну көрәрик.

Демәли, һәр бир сонлу онлуг кәср расионал әдәддир. Лакин, әксинә, һәр расионал әдәд сонлу онлуг кәсрлә ифадә едилә билмәз. Мәсәлән, $\frac{1}{3}$ расионал әдәди 0,333 ... сонсуз онлуг кәсри илә ифадә едилир. Яхуд башга мисаллар көтүрсәк ейни һалын тәкрар етдийини көрәрик:

$$\frac{1}{6} = 0,166666\ldots;$$

$$\frac{1}{7} = 0,142857142857142857\ldots;$$

$$\frac{122}{1100} = 0,1109090909\ldots$$

Бу сонунчу мисаллары нәзәрдән кечирдикдә, алынан сонсуз онлуг кәсрләрин һамысына аид олан бир чәһәт дәрһал көзә чарпыр. Бу чәһәт һәмин сонсуз онлуг кәсрләрин онлуг ишарәләринин я дәрһал бир вә я бир нечә онлуг ишарәсинин сонсуз дәфә, я да бир нечә онлуг ишарәсиндән сонра бир груп онлуг ишарәләрин сонсуз дәфә тәкрар етдийиндән ибарәтдир. 0,333... онлуг кәсринин онлуг ишарәләринин сайы сонсуздур вә бу

онлуг ишарәләрин һамысы 3-үн тәкрарындан ибарәтдир. 0,1666... сонсуз онлуг кәсриндә исә 1 онлуг ишарәсиндән сонра кәлән 6 енә дә сонсуз дәфә тәкрар эдир. 0,142857142857... сонсуз онлуг кәсриндә 142857 онлуг ишарәләри групу сонсуз дәфә тәкрар эдир. Белә онлуг кәсрләрә *дөври онлуг кәсрләр* дейилир.

Бүтүн бу дейиләнләри үмумиләшдирсәк, сонлу онлуг кәсрлә ифадә эдилмәйән һәр бир расионал әдәдин дөври онлуг кәсрлә ифадә олуна биләчәйини һөкм эдә биләрик.

Доғрудан да, тутаг ки, $\frac{p}{q}$ әдәди сонлу онлуг кәсрлә ифадә олунмаян бир ихтияри расионал әдәддир. Бу расионал әдәди ифадә эдән онлуг кәсрин дөври олдуғуну исбат эдәк.

Тутаг ки,

$$\frac{p}{q}=p_0+\frac{p_1}{10}+\frac{p_2}{10^2}+\frac{p_3}{10^3}+\ldots+\frac{p_n}{10^n}+\ldots$$

сонсуз онлуг кәсрлә ифадә эдилибдир.

Бурада ардычыл бөлмә заманы онлуг системиндә галыгларын һеч бири сыфыр олмамалыдыр, чүнки галыглардан бириси сыфыр олсайды, онлуг кәср сонлу оларды.

Айдындыр ки, һәмин галыглар 1, $(q-1)$ вә бу әдәдләр арасындакы там әдәдләрдән ибарәт ола биләр. Демәли, ардычыл бөлмә заманы галыгларын мүмкүн олан гиймәтләри 1-дән $q-1$-ә кими натурал әдәдләр арасында ола биләр. Она көрә дә q бөлкүдән сонра һәр һансы бир галыг енә тәкрар мейдана чыхачаг вә эйни гайда илә о бири галыглар да тәкрар эдәчәкдир.

Беләликлә, **сонлу онлуг кәср шәклиндә көстәрилмәйән һәр бир расионал әдәд дөври онлуг кәср васитәси илә ифадә эдилир.**

Бу расионал әдәдләр групуна сонлу онлуг кәсрлә ифадә эдилән расионал әдәдләри гошсаг вә һәр бир сонлу онлуг кәсрин онлуг ишарәләринин сонуна сыфырлар әлавә этмәклә дөври онлуг кәсрә кәтирилдийини нәзәрә алсаг бүтүн расионал әдәдләрин дөври онлуг кәсрләрлә ифадә эдилдийини һөкм эдә биләрик. Бу һөкмүн тәрси дә доғрудур, йә'ни бүтүн дөври онлуг кәсрләр расионал әдәдләрдән ибарәтдир (бу тәклифи бир гәдәр сонра һәндәси силсилә бәһсиндә исбат эдәчәйик).

§ 6. ИРРАСИОНАЛ ӘДӘДЛӘР

Верилмиш бир парчаны ваһид адланан дикәр парча илә өлчмә просесиндә, верилмиш парчанын узунлуғуну ифадә эдән үч нөв онлуг кәсрә раст кәлдик. Бунлардан бириси сонлу, дикәри дөври (сонсуз), үчүнчүсү исә дөври олмаян сонсуз он-

луг кәсрдир. Биринчи ики нөв онлуг кәсрләрин расионал әдәдлә вә һәр бир расионал әдәдин биринчи ики нөв онлуг кәсрләрин бириси васитәси илә ифадә олуна билмәсини исбат этдик вә беләликлә дөври онлуг кәсрләрин тәбиәтини мейдана чыхардыг. Башга сөзлә десәк, дөври онлуг кәсрләр бизә мә'лум олан әдәдләр синфинә аид олуб, бу синифдән кәнара чыхмаға вә беләликлә дә ени тәбиәтли әдәдләри тапмаға, бизә мә'лум олан әдәдләр синфини кенишләндирмәйә имкан вермәди.

Инди исә дөври олмаян сонсуз онлуг кәсрләрдән бәһс эдәк. Биз бу онлуг кәсрләри „әдәд“ дейә адландыра биләрикми? Әкәр „әдәд“ сөзү алтында анчаг расионал әдәд баша дүшүрүксә, дөври олмаян сонсуз онлуг кәсрләрә әдәд дейә билмәрик, чүнки әкәр дөври олмаян бир сонсуз онлуг кәср (буну α илә ишарә эдәк) расионал әдәд олсайды, онда һәмин онлуг кәсри $\frac{p}{q}$ шәклиндә көстәрә биләрдик, йә'ни $\alpha=\frac{p}{q}$ оларды. Бу исә ола билмәз, чүнки һәр бир расионал әдәдин, о чүмләдән $\frac{p}{q}$-нүн мүәййән дөври онлуг кәср шәклиндә көстәрилә билдийини юхарыда исбат этдик. Бурадан, дөври олмаян сонсуз онлуг кәсри „әдәд“ дейә адландырсаг, онда ени тәбиәтли әдәд әлдә эдәрик вә беләликлә әдәдләр синфини бир даһа кенишләндирмиш оларыг. Лакин дөври олмаян сонсуз онлуг кәсрләрә „әдәд“ ады вермәк үчүн һәр шейдән әввәл бу ени әдәдләр расионал әдәдләрин табе олдуғу ганунлара табе олмагла мүәййән мә'нада расионал әдәдләрә „яхын“ олмалыдыр. Гейд этмәк лазымдыр ки, „яхынлыг“ анлайышы бурада хүсуси мә'на дашыйыр вә кәләчәкдә изаһ олуначагдыр. Ени тәбиәтли әдәдләр, гейд этдийимиз кими, ваһид парчаның вә онун һәр бир бәрабәр һиссәсинин $\left(\frac{1}{q}\right.$ һиссәси, q ихтияри натурал әдәддир$\left.\right)$ верилмиш парчада там дәфә ерләшмәдийи һалда мейдана чыхыр. Демәли, верилмиш парчанын узунлуғу бу һалда, ваһид парчанын һәр бир $\frac{1}{q}$ һиссәсинин там сайына бәрабәр олмур. Она көрә дә дейилир ки, верилмиш парча ваһид парча васитәсилә *өлчүлә билмир*. Башга сөзлә, верилмиш парча илә ваһид парча *ортаг өлчүсүздүр* дейилир, чүнки бу һалда өлчү просесиндә верилмиш парчада вә ваһид парчада там дәфә ерләшән башга бир ортаг парча тапмаг мүмкүн дейилдир. Беләликлә, узунлуғу $\frac{p}{q}$ шәклиндә көстәрилә билмәйән һәр бир парчая ваһид парча илә *өлчүлә билмәйән* вә я ваһидлә *ортаг өлчүсүз парча* дейилир.

Инди исә узунлуғу a вә b олан ики парча көтүрәк. Тутаг ки, узунлуғу c олан бир парча узунлуғу a олан парчада p дәфә, узунлуғу b олан парчада исә q дәфә ерләшир. Онда ашкардыр ки,

$$c = \frac{a}{p}$$

вә

$$b = q \cdot \frac{a}{p} = \frac{q}{p} \cdot a$$

олар. Белә олдугда узунлуғу a вә b олан парчалара *ортаг өлчүлү* дейилир. Бурада ортаг өлчүнүн узунлуғу $\frac{a}{p}$-дир. Һәмин парча узунлуғу a олан парчада p дәфә, узунлуғу b олан парчада исә q дәфә ерләшир.

Араларында

$$b = \frac{q}{p} \cdot a$$

кими мүнасибәт ифадә эдилә билмәйән ики a вә b парчая *ортаг өлчүсүз* парчалар дейилир. $a = 1$ олдугда юхарыда дейилән ваһид парча илә ортаг өлчүлү вә ортаг өлчүсүз b узунлуглу парча алыныр. Белә ки, биринчи һалда b-ни

$$b = \frac{q}{p}$$

шәклиндә көстәрмәк мүмкүн олур. Икинчи һалда исә белә көстәрмәк мүмкүн олмур. Бу дейиләнләри нәзәрә алараг расионал әдәдләрлә ифадә олуна билмәйән сонсуз онлуг кәсрләр *иррасионал*[1] әдәд адландырылмышдыр.

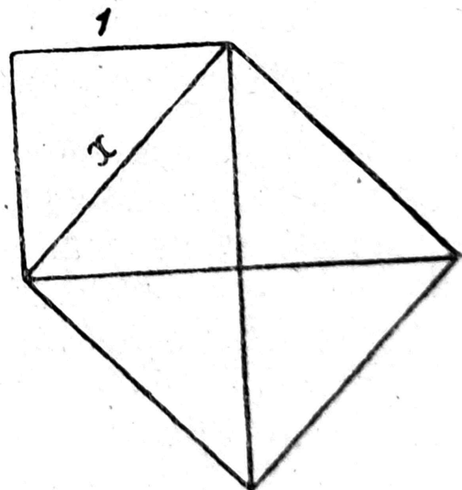
Ортаг өлчүсүз парчаларын чох гәдим заманларда Юнаныстанда, (тәхминән 2500 ил бундан әввәл) Пифагорун элми мәктәбиндә кәшф эдилмәси элм аләминдә бөйүк һадисәдир. Белә бир фактын дәрк эдилмәси исә чох күман ки, юнанлыларын риязийята кәтирдийи чидди риязи методларын башланғычы олмушдур. Бөйүк әзмлә гейд этмәк олар ки, бу кәшф риязийятын, еләчә дә фәлсәфәнин кәләчәк инкишафына өз тә'сирини көстәрмишдир. Пифагорчулар илк дәфә квадратын тәрәфи илә диагоналынын ортаг өлчүсүз парчалар олдуғуну сүбут этдиләр[2]. Онлар көстәрдиләр ки, квадратын тәрәфи илә диагоналынын ортаг өлчүсүнү тапмаг просеси сонсуз просес-

---

[1]Иррасионал (латынча irrationalis) ортаг өлчүсүз демәкдир.

[2] Бу һагда академик З. И. Хәлиловун „Инсанлар индики риязийята нечә кәлиб чыхмышлар“ китабчасында гейд эдилмишдир.

дир. Бурада һәр дәфә эйни мәсәлә, тәрәфләри һудудсуз олараг кичилән квадрат үзәриндә һәлл эдилир. Белә бир өлчмә нәтиҹәсиндә ялныз дөври олмаян сонсуз онлуг кәср алына биләр. Бу онлуг кәср исә тәрәфи өлчү ваһиди көтүрән квадратын диагоналынын узунлуғу дейә гәбул олунарса, онда расионал әдәдләр даирәси кенишләниб күлли мигдарда мәсәләләрин һәллинә йол ачмыш олар. Бу мәсәләләрдән ән гәдими чеврәнин узунлуғунун өз радиусу илә өлчүлмәси мәсәләсидир. Юнанлыларын ортаг өлчүсүз парчалары тарихән чох тез кәшф этмәләри вә бурада ортая чыхан чәтинликләрин дәрк эдилмәси, эйни заманда риязийятда узун сүрән бир дурғунлуға да сәбәб олмушдур. Бүтүн юнан риязийятына хас олан, риязийяты һәндәсәләшдирмә йолу иррасионал әдәдләр һесабынын инкишафына мане олмуш вә тәхминән 2 мин ил әдәд анлайышынын лабүд олан инкишафынын йолуну кәсмишдир. Она көрә дә юнанлыларын, иррасионал әдәдләри дейил, ялныз ортаг өлчүсүз парчалары кәшф этдикләрини демәк даһа дүзкүн оларды. Юнан риязи ән'әнәләрини Яхын вә Орта Шәргин риязи ән'әнәләриндән фәргләндирән әсас чәһәтләрдән бири дә бу чәһәтдир. Бир әср әввәл Орта вә Яхын Шәргдә бөйүк һесаблама техникасы инкишаф этдирилдийи һалда, юнанлылар иррасионал әдәдләрин инкишаф йолуну сырф һәндәсә аксиомларында көрүрдүләр. Бүтүн бу манеәләрә бахмаяраг Пифагордан Платона гәдәр олан дөвр әрзиндә иррасионал әдәдләрин өйрәнилмәси риязийятда мүһүм тәрәгги һесаб эдилә биләр. Беләликлә, иррасионал әдәдләрин мәншәи вә инкишафы квадратын тәрәфи илә диагоналынын ортаг өлчүсүз олдуғуну мүәййән эдән вахтдан башлайыр. Квадратын тәрәфи илә диагоналынын ортаг өлчүсүз олдуғуну көстәрән чохлу исбатлар вардыр[1]. Биз башга бир исбата мүраҹиәт эдәк. Квадратын тәрәфини өлчү ваһиди гәбул эдәк (6-чы шәкил), йә'ни квадратын тәрәфинин узунлуғуну 1 гәбул эдәк. Диагоналынын узунлуғуну исә x илә ишарә эдәк.



6-чи шәкил

Бу гәдим шәкилдән көрүндүйү кими квадратын диагоналы үзәриндә гурулан квадратын саһәси, ики тәрәфи үзәриндә гурулан квадратларын саһәләри ҹәминә бәрабәрдир. Диагонал үзәриндә гурулан квадратын

[1] Бунлардан Пифагор мәктәбинә аид олан исбат, академик З. И. Хәлиловун „Даирәнин квадратурасы" адлы китабында гейд олунмушдур.

саһәси x^2, бир тәрәф үзәриндә гурулан квадратын саһәси исә 1 олдуғу үчүн

$$x^2=1+1=2$$

олар.

Квадраты 2-йә бәрабәр олан x-и $\sqrt{2}$ илә ишарә эдәк[1]. $x=\sqrt{2}$.

Гейд этмәк лазымдыр ки, там әдәдләр ичәрисиндә квадраты 2 олан там әдәд йохдур, чүнки $1^2<2$; $2^2=4$ исә 2-дән бөйүкдүр. Инди исбат эдәк ки, квадраты 2 олан әдәд бүтүн расионал әдәдләр ичәрисиндә йохдур[2]. Бунун әксини фәрз эдәк. Тутаг ки, расионал әдәдләр ичәрисиндә элә бир $\frac{p}{q}$ расионал әдәди вардыр вә бу һалда $\left(\frac{p}{q}\right)^2=2$-дир.

Биз һәмишә $\frac{p}{q}$ кәсрини ихтисар олмаян кәср көтүрә биләрик, әкс һалда әввәлчә ихтисар эдәрәк ихтисар олмаян $\frac{p}{q}$ кәсри шәклинә кәтирә биләрик.

Айдындыр ки, бу һалда

$$p^2=2\,q^2$$

олачагдыр. Бу бәрабәрлийин сағ тәрәфи чүт әдәддир. Онда сол тәрәфи олан p^2 әдәди дә чүтдүр. Белә олдугда p әдәди дә чүт олмалыдыр.

Әкәр тәк әдәд олсайды онда p^2 әдәди дә тәк оларды.

Доғрудан да тутаг ки,

$$p=2\,n+1 \qquad (\text{бурада } n=0,\ 1,\ 2,\ldots)$$

тәк әдәддир. Онда

$$p^2=(2\,n+1)^2=(2\,n+1)\ (2\,n+1)$$

олмалыдыр. Тәркиб ганунуну ардычыл тәтбиг этсәк

$$p^2=(2\,n+1)\cdot 2\,n+(2\,n+1)\cdot 1=2\,n\cdot 2\,n+2\,n+2\,n+1=$$
$$=2\,n\cdot 2\,n+2\cdot 2\,n+1=2\,(2\,n^2+2\,n)+1$$

аларыг. Демәли p^2 тәк әдәддир. Бу исә p^2-ин чүт олмасы шәртинә зиддир. Ачыг-айдын көрүнән бу зиддийәт p-нин чүт олдуғуну көстәрир. Она көрә дә

$$p=2\,n$$

олмалыдыр. Бурадан $p^2=4\,n^2$ олур.

Демәли

$$4\,n^2=2\,q^2$$

---

[1] $\sqrt{\ }$ ишарәсини илк дәфә Родолф ишләтмишдир (Rudolff 1500-чү илдә анадан олмушдур). Бә'зиләринин фикринә көрә көкүн мәншәи γ һәрфидир.

[2] Ики мин илдән чох тарихи олан бу гиймәтли исбат Эвклид тәрәфиндән верилмишдир.

вә я:

$$q^2 = 2n^2.$$

Јухарыдакы мүһакимәјә әсасән q чүт әдәд олмалыдыр. Белә олдугда 2 әдәди p вә q әдәдләринин ортаг бөләнидир. Бу исә $\frac{p}{q}$-нүн ихтисар олмајан кәср олмасы шәртинә тамамилә зиддир.

Демәли, квадраты 2-јә бәрабәр олан һеч бир расионал әдәд јохдур.

Белә һалларда әввәлләрдә олдуғу кими јени әдәд јаратмаг зәрурәти мејдана чыхыр. Һәр шејдән габаг јени әдәди нечә јаратмаг суалына чаваб вермәлијик. Буну $\sqrt{2}$ үзәриндә нүмајиш етдирәк. Әввәлчә $\sqrt{2}$-нүн тәгриби гијмәтләрини тапаг. $\sqrt{2}$-нүн тәгриби гијмәти олан онлуг кәсрләрин ихтијари n-чи јердә дуран онлуг ишарәсинин үмуми ифадәсини билмәсәк дә ардычыл сурәтдә, истәдијимиз онлуг ишарәләрини һесаблаја биләрик:

$$1^2 = 1 < 2 < 2^2 = 4$$
$$(1,4)^2 = 1,96 < 2 < (1,5)^2 = 2,25$$
$$(1,41)^2 = 1,9881 < 2 < (1,42)^2 = 2,0264$$
$$(1,414)^2 = 1,999396 < 2 < (1,415)^2 = 2,00225$$
$$(1,4142)^2 = 1,99996164 < 2 < (1,4143)^2 = 2,00024449$$

вә и. а.

Беләликлә, $\sqrt{2}$-ин тәгриби гијмәтләриндән дүзәлмиш ики сыра[1]

1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; 1,41421; 1,414213; 1,4142135;. . . (1)

вә

2; 1,5; 1,42; 1,415; 1,4143; 1,41422; 1,414214; 1,4142136; . . . (2)

әдәдләринин һеч биринин квадраты 2-јә бәрабәр олмур. Ејни гајда илә онлуг ишарәләрин сајыны истәдијимиз гәдәр давам етдирсәк јенә дә квадраты 2-јә бәрабәр олан сонлу онлуг кәср тапылмаз. Бурада биринчи сыра әдәдләр әксијн илә икинчи сыра исә артығы илә $\sqrt{2}$-нүн тәгриби гијмәтләридир. Бу әдәдләрин квадратлары

1; 1,96; 1,981; 1,999396; 1,99996164;. . .

вә

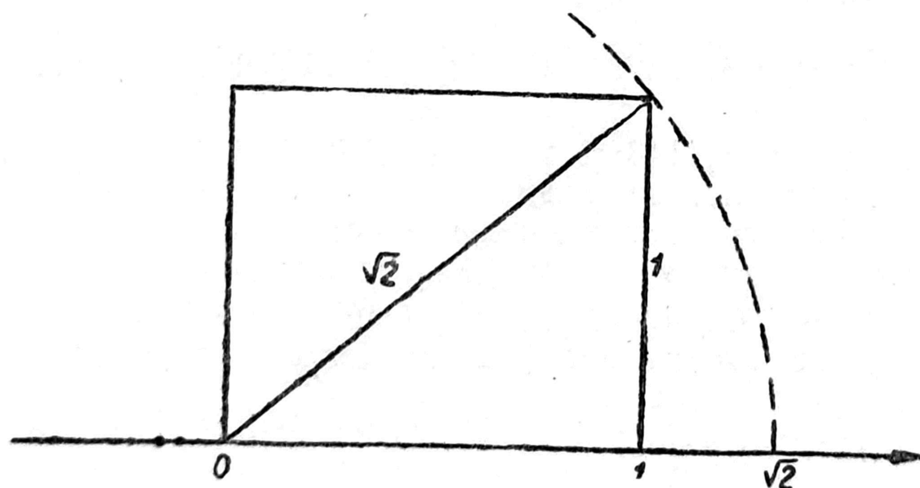
4; 2,25; 2,064; 2,00225; 2,00024449:. . .

һәр ики тәрәфдән 2-јә јахынлашыр. Биринчи сыра арта-арта (ашағыдан), икинчи сыра әдәдләри исә азала-азала (јухарыдан) 2-јә јахынлашыр. Беләликлә $\sqrt{2}$, ашағыдан квадраты кет-

[1] Бу әдәдләр $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \ldots$ вә и. а. дәгиглијн илә $\sqrt{2}$-ин тәгриби гијмәтләри кими тапылыр.

дикчә 2-йә яхынлашан (йә'ни онлуг ишарәләринин сайы, артдыгча 2 илә олан фәргләри азалан) биринчи сыра яхуд юхарыдан (йә'ни онлуг ишарәләринин сайы артдыгча енә дә 2 илә олан фәргләри азалан) 2-йә яхынлашан икинчи сыра әдәдләр васитәсилә ифадә эдилә биләр. Һәр ики сырадакы әдәдләр дөври олмаян сонсуз онлуг кәср олачагдыр. (1) әдәдләр сырасыны көтүрәк. Бу әдәдләрин артыгы илә көтүрүлән (2) сырасынын әдәдләриндән үстүн чәһәти орасындадыр ки, (1) әдәдләрин онлуг ишарәләри артдыгча әввәлки груп онлуг ишарәләри сахланылыр. (2) әдәдләринин исә онлуг ишарәләри артдыгча әввәлки онлуг ишарәләр групу дәйишилир. Она көрә дә $\sqrt{2}$-нү бүтүн онлуг ишарәләри бир дәфәлик көтүрүлән 1,4142135... әдәди шәклиндә тә'йин эдәк. Бу әдәди бирдәфәлик сонсуз онлуг кәср шәклиндә язмаг олмаса да, онун онлуг ишарәләрини тәдричән тапмаг имканы вардыр. Айындыр ки, $\sqrt{2}$-нүн истәр биринчи сыра (1) гиймәтләри, истәрсә дә икинчи сыра (2) гиймәтләринин һәр бири сонлу онлуг кәсрләр олдуғу үчүн бу гиймәтләр әдәд охунда көстәрилә биләр. Белә бир суал ортая чыхыр. Һәмин сонсуз просес нәтичәсиндә $\sqrt{2}$-нү ифадә эдән (демәк $\sqrt{2}$ өзү) сонсуз онлуг кәср әдәд охунун мүәййән бир нөгтәси васитәсилә көстәрилә биләрми?

Бу суала чаваб вермәк үчүн әдәд охунун [0,1] парчасы үзәриндә квадрат гуруб пәркар васитәсилә онун диагоналынын узунлуғуну (йә'ни $\sqrt{2}$-нү; бу узунлуг юхарыда көстәрилән сонсуз өлчү просесинин нәтичәсиндә тапылмышдыр)



7-чи шәкил

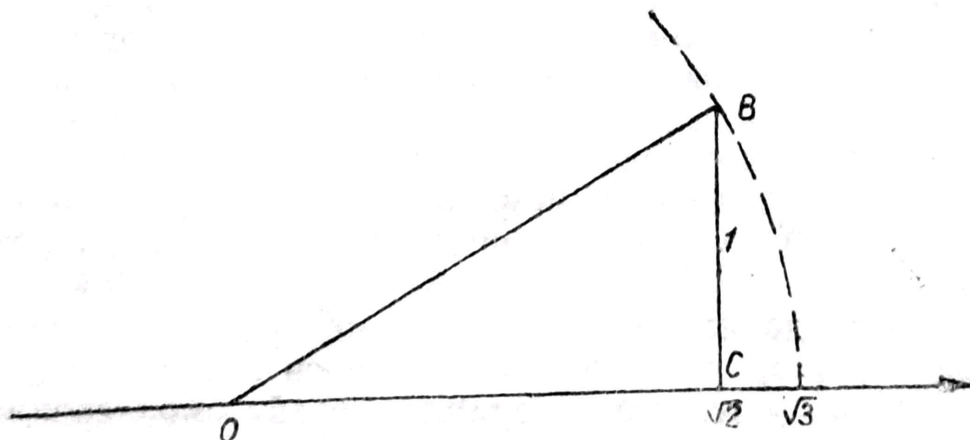
әдәд оху үзәриндә, бир учу сыфыр нөгтәсинә дүшмәклә айыраг. Онда һәмин парчанын сон учу $\sqrt{2}$-нү әдәд оху үзәриндә ишарә эдәчәкдир (7-чи шәкил).

Шәкилдән расионал әдәдләр чохлуғунун әдәд оху тамам долдурмадығы гәнаәти һасил эдилир.

Белә бир суал мейдана чыхыр: **нәдәндир ки, һәр ердә сых олан расионал әдәдләр чохлуғу әдәд охуну долдурмаға гадир дейилдир?**

Әдәд оху үзәриндә иррасионал әдәди көрмәк вә я иррасионал әдәди расионал әдәддән айырмаг һеч бир вәчһлә мүмкүн дейилдир. Ялныз ортаг өлчүсүз парчаларын дәрин вә дүзкүн риязи маһиййәти белә бир нәтичәйә кәтириб чыхармышдыр. Ваһид парча илә ортаг өлчүсүз олан һәр бир парчаны бир учу сыфыр нөгтәсиндә олмагла әдәд оху үзәриндә айырмыш олсаг, онун дикәр учунун дүшдүйү нөгтә иррасионал нөгтәдән ибарәт олачагдыр. Мәсәлән, квадраты 3-ә бәрабәр олан әдәдин дә иррасионал олдуғу вә әдәд охунда ерләшдийини эйни гайда илә исбат едә биләрик (бу әдәди $\sqrt{3}$ илә ишарә едәк)[1].

Бунун үчүн әдәд оху үзәриндә узунлуғу $\sqrt{2}$ олан парча көтүрүб, онун үзәриндә катетинин узунлуғу ваһид олан бир дүзбучаглы үчбучаг гураг (8-чи шәкил).



8-чи шәкил

Пифагор теореминә көрә

$$(OB)^2 = (OC)^2 + (CB)^2 = 2 + 1 = 3$$

яза биләрик[2]. Демәли, $OB = \sqrt{3}$-дүр.

Әдәд оху үзәриндә пәркар васитәсилә OB-нин узунлуғу бөйүклүкдә парча айырсаг[3] (бир учу сыфыр нөгтәсиндә олмаг шәртилә), һәмин парчанын сон учу әдәд оху үзәриндә $\sqrt{3}$-нү көстәрән нөгтәдән ибарәт олар. Белә нөгтәләрдән чох көс-

---

[1] 425-чи илдә Сирендә яшамыш Теодорос (Theodorus) илк дәфә иррасионаллығын ялныз $\sqrt{2}$-йә аид олмайыб $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}, \ldots$, $\sqrt{17}$-ин (йә'ни квадраты 3, 5,..., 17 олан әдәдләрин) дәхи иррасионал олдуғуну көстәрмишдир. Бә'зи тарихчиләр Платонун Теодоросдан һәндәсә өйрәндийини гейд эдирләр.

[2] Биз ялныз бурада Пифагор теореминдән истифадә эдирик.

[3] Шүбһәсиз ки, пәркарла ишләйән заман $\sqrt{3}$-үн әдәд оху үзәриндәки еринин дүзкүн тапылмасы тәчрүбә синдә мүәййән хата варцыр. Лакин нәзәри чәһәтдән әдәд оху үзәриндә белә бир нөгтәнин варлығы инкар эдилмәз бир һәгигәтдир.

тәрмәк олар. Бүтүн бу һәндәси тә'рифләр алтында кизләнән иррасионал әдәдин керчәк маһиййәти кәләчәкдә ардычыллыглар бәһсиндә дәгигләшдириләчәкдир. Бу хүсуси мисаллара әсасән сөйләдиййимиз мүлаһизәләрдән сонра иррасионал әдәдин юхарыда вердиййимиз үмуми тә'рифинә мүрачиәт эдәк. Гейд этдиййимиз кими дөври олмаян һәр бир сонсуз

$$\alpha = p, \ p_1 \ p_2 \ p_3 \ldots p_n \ldots$$

онлуг кәсрә иррасионал әдәд дейилир.

$\sqrt{2}$ кими $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$,... әдәдләри дә дөври олмаян онлуг кәсрләрлә ифадә олуна билир. Лакин бу һеч дә о демәк дейилдир ки, иррасионал әдәдләр ялныз көкү расионал олмаян әдәдләрдән ибарәтдир вә я бүтүн иррасионал әдәдләрин мәнбәи көкләрдир. Бу, янлыш фикирдир.

Көкдән алына билән вә я алына билмәйән һәр бир дөври олмаян сонсуз онлуг кәср иррасионал әдәддир. Иррасионал әдәдләрин расионал әдәдләрә гошулмасындан алынан әдәдләр чохлуғуна *һәгиги әдәдләр* дейилир. Расионал әдәдләрин дөври онлуг кәсрләрлә ифадә эдилә билдиййини нәзәрә алыб **һәгиги әдәди сонсуз онлуг кәср дейә тә'риф эдә биләрик.** Гейд этмәк лазымдыр ки, мүсбәт расионал әдәдләрдән мәнфи расионал әдәдләрә кечдиййимиз кими, мүсбәт иррасионал әдәдләрдән дә мәнфи иррасионал әдәдләрә кечә биләрик.

Беләликлә әдәд оху тамамилә „долдурулмуш" олур. **Һәгиги әдәдләр әдәд оху үзәриндә нәинки сыхдыр, һәтта долудур.**

Расионал әдәдләрдә олдуғу кими, иррасионал әдәдләрин дә әдәд оху үзәриндә тәнзим эдилмәси (бөйүклүк вә кичиклийи) һабелә бу әдәдләр үзәриндә һесаб әмәлләринин апарылмасы кими мәсәләләрин мүстәсна әһәмиййәти вардыр. Иррасионал әдәдләрә аид бу мәсәләләрин тәһлилинә кечәк.

Иррасионал әдәдләрин хассәләри

1. Иррасионал әдәдләри тәнзим этмәк олар.

Мә'лум олдуғуна көрә һәр бир $\frac{p}{q}$ расионал әдәдини дөври сонсуз онлуг кәсрлә ифадә этмәк мүмкүндүр:

$$\frac{p}{q} = p_0, \ p_1 \ p_2 \ldots p_n \ldots$$

Бу онлуг кәсрин муәййән онлуг ишарәсиндән сонра кәлән онлуг ишарәләрини нәзәрә алмасаг, онда $\frac{p}{q}$ расионал әдәдинин юхарыда гейд этдиййимиз кими эксийи илә тәгриби гий-

мәтини әлдә эдирик. Мәсәлән, онлуг кәсри κ-чы ишарәдә кәсәк

$$p_0, p_1 p_2 \ldots p_\kappa = p_0 + \frac{p_1}{10} + \frac{p_2}{10^2} + \ldots + \frac{p_\kappa}{10^\kappa} \leqslant \frac{p}{q}$$

алынар.

Бурада к=1, 2, 3,... гиймәтләрини версәк $\frac{p}{q}$ расионал әдәдинин әксийилә ашағыдакы гиймәтләрини әлдә эдирик:

$$a_1 = p_0, p_1; \; a_2 = p_0 \, p_1 \, p_2; \ldots; \; a_n = p_0, p_1 \, p_2 \ldots p_n; \ldots$$

Әкәр бу тәгриби гиймәтләрин ахырынчы онлуг ишарәләринин үзәринә бир әлавә этсәк $\frac{p}{q}$ расионал әдәдинин артығы илә тәгриби гиймәтләрини әлдә эдәрик:

$$a_1^1 = p_0, p_1 + \frac{1}{10}; \; a_2^1 = p_0, p_1 \, p_2 + \frac{1}{10^2}; \ldots;$$

$$a_n^1 = p_0, p_1 \, p_2 \ldots p_n + \frac{1}{10^n}, \ldots$$

Бурада $a_n^1 > \frac{p}{q}$ олачағы айдындыр.

Бу гайданы иррасионал әдәдләрә дә тәтбиг эдәк. Ихтияри иррасионал әдәд көтүрәк:

$$\alpha = \alpha_0, \alpha_1 \, \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$$

Юхарыда олдуғу кими, бу иррасионал әдәдин әксийи илә тәгриби гиймәтләрини

$$a_1 = \alpha_0, \alpha_1; \; a_2 = \alpha_0, \alpha_1 \, \alpha_2; \ldots; \; a_n = \alpha_0, \alpha_1 \, \alpha_2 \ldots \alpha_n; \ldots$$

вә артығы илә тәгриби гиймәтләрини исә

$$a_1^1 = \alpha_0, \alpha_1 + \frac{1}{10}; \; a_2^1 = \alpha_0, \alpha_1 \, \alpha_2 + \frac{1}{10^2}; \ldots;$$

$$a_n^1 = \alpha_0, \alpha_1 \, \alpha_2 \ldots \alpha_n + \frac{1}{10^n}; \ldots$$

шәклиндә тә'йин эдәк вә

$$a_n < \alpha < a_n^1$$

олдуғуну гәбул эдәк.

Индийә гәдәр биз ялныз расионал әдәдләри мүгайисә этмәйи бачарырдыг. Иррасионал әдәдләри бир-бири илә вә иррасионал әдәдләри расионал әдәдләрлә мүгайисә этмәйин нә демәк олдуғуну билмирдик. Она көрә дә иррасионал әдәди өзүнүн сонлу онлуг һиссәләри илә мүгайисәсини гәбул этмә-

ли олдуг. Үмуми һалда һеч олмаса бириси иррасионал олан ики һәгиги әдәдин мүгайисәси ашағыдакы кими тә'йин эдилир. Тутаг ки,

$$\alpha=\alpha_0,\ \alpha_1\ \alpha_2\dots\alpha_n\dots$$

вә

$$\beta=\beta_0,\ \beta_1\ \beta_2\dots\beta_n\dots$$

ихтияри һәгиги әдәдләрдир (бурада $\alpha_0,\ \alpha_1\dots\alpha_n\dots;\ \beta_0,\ \beta_1\dots\beta_n\dots$ там әдәдләрдир). Әкәр $\alpha_0>\beta_0$ вә я $\alpha_0=\beta_0$ олдугда $\alpha_1>\beta_1$ вә я $\alpha_0=\beta_0$ вә $\alpha_1=\beta_1$ олдугда $\alpha_2>\beta_2$ вә и. а. оларса, онда $\alpha>\beta$ олдуғуну гәбул эдәчәйик. Мәсәлән, чеврәнин узунлуғунун диаметрә нисбәтини ифадә эдән π әдәдилә (бу әдәд иррасионал әдәддир вә һеч бир там әдәдин истәнилән дәрәчәдән көкү ола билмәз; белә әдәдләрә *трансендент әдәдләр* дейилир)[1] йә'ни дөври олмаян сонсуз 3,14... онлуг кәсри илә $\sqrt{10}=$ $=3,16\dots$ иррасионал әдәдини мүгайисә этдикдә көрүрүк ки, бу әдәдләрин там һиссәләри ($\alpha_0=\beta_0$) вә биринчи онлуг ишарәләри ($\alpha_1=\beta_1=1$) бәрабәрдир. Икинчи онлуг ишарәләриндән исә, $\beta_3=6>4=\alpha_3$-дир. Она көрә дә $\sqrt{10}>\pi$ олур.

Ву гайда, ики чүр онлуг кәсрлә ифадә эдилән расионал әдәдләрдән башга, галан бүтүн расионал әдәдләр үчүн дә доғрудур. Доғурдан да[2], 0,2300... вә 0,2299... әдәдләри эйни расионал әдәдләрин онлуг кәсрләрлә ифадәсидир, лакин онлуг ишарәләри бәрабәр дейилдир. Айдындыр ки, әкәр $\alpha>\beta$, $\beta>\gamma$ олса онда $\alpha>\gamma$ олар.

Ики

$$\alpha_0,\ \alpha_1\dots,\alpha_{n-1}\ \alpha_n\ \alpha_{n+1}\dots$$
$$\beta_0,\ \beta_1\dots\beta_{n-1}\ \beta_n\ \beta_{n+1}\dots$$

һәгиги әдәдин бәрабәрлийи тә'рифини верәк:

1) там вә бүтүн онлуг ишрәләри бәрабәр олан

$$\alpha_i=\beta_i \qquad (i=0,\ 1,\ 2\dots),$$

2) тамлары вә мүәййән онлуг ишарәйә гәдәр онлуг ишарәләри бәрабәр олан

$$\alpha_0=\beta_0,\ \alpha_1=\beta_1,\dots,\ \alpha_{n-1}=\beta_{n-1},$$

вә бу онлуг ишарәсиндән билаваситә сонра кәлән онлуг ишаләри уйғун олараг бир-бириндән бир ваһид артыг ($\alpha_n=\beta_n+1$), һабелә биринчи һәгиги әдәдин сонра кәлән онлуг ишарәләринин һамысы сыфыр, икинчи һәгиги әдәдин уйғун онлуг ишарәләри исә доггузлуглардан ибарәт олан

$$\alpha_{n+1}=\alpha_{n+2}=\dots=0.$$
$$\beta_{n+1}=\beta_{n+2}=\dots=9$$

---

[1] Бу һагда академик З. И. Хәлиловун „Даирәнин квадратурасы" китабчасында гейд олунубдур.

[2] Енә орда.

һәгиги әдәдинә *бәрабәр һәгиги әдәдләр* дейилир. Мәсәлән,

$$1,120\ldots 000\ldots = 1,11999\ldots 999$$

вә я

$$100,000\ldots \quad 99,999\ldots 999\ldots$$

әдәдләри бәрабәр һәгиги әдәдләрдир. Айдындыр ки, әкәр $\alpha = \beta$ вә $\beta = \gamma$ исә онда $\alpha = \gamma$ олар.

Беләликлә, ихтияри һәгиги әдәдләр үчүн ашағыдакы нәтиҹәләри әлдә этдик:

1) ихтияри ики α вә β һәгиги әдәдләри я бир-биринә бәрабәрдир: $\alpha = \beta$ вә я $\alpha < \beta$, $\alpha > \beta$ бәрабәрсизликләриндән бири өдәнилир.

2) һәр үч α, β, γ һәгиги әдәдләри арасында ашағыдакы мүнасибәт доғрудур; әкәр $\alpha > \beta$, $\beta > \gamma$ исә, онда $\alpha > \gamma$ олар. Бу хассәләрә малик олан һәр ҹүр әдәдләр чохлуғуна *тәнзим эдилмиш чохлуг* дейилир. Айдындыр ки, һәгиги әдәдләр чохлуғу тәнзим эдилмиш чохлугдур. Иррасионал әдәдләри расионал әдәдләрин көмәйи илә тәнзим эдә билдик. Дәриндән олмаса да, һәр бир иррасионал әдәдә бир иррасионал әдәди ифадә эдән сонсуз онлуг кәсрин сонлу һиссәләри васитәсилә истәнилән гәдәр яхынлаша биләҹәйимизи көстәрдик. Бу ҹәһәт һәр бир иррасионал әдәдә дә расионал әдәдләр васитәсилә кафи гәдәр яхынлаша билмәк имканыны ашкара чыхардыр. Она көрә дә юхарыда иррасионал әдәдләрин расионал әдәдләрә „яхын" олмасы әсасында иррасионал әдәдләри әдәд адландырдыг. Иррасионал әдәдләр үзәриндә эдилән ашағыда көстәрилмиш әсас әмәлләрин хассәләри бу яхынлығы бир даһа тәсдиг эдир. Белә суал мейдана чыха биләр: расионал әдәдләр техникада гаршыя чыхан тәләбләри өдәйә билирми?

Техникада гаршыя чыхан мәсәләләрин һәллиндә иррасионал әдәдләри адәтән бу вә я дикәр дәгиглик дәрәҹәсинә көрә расионал әдәдләрә әвәз эдир вә һесаблама ишләрини баша чатдырырлар. Мәсәлән: чеврәнин узунлуғуну, даирәнин саһәсини, силиндрин һәҹмини вә я сәтһинин саһәсини һесабладыгда $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$,... дәгигликлә π әдәдинин 3,14; 3,142; 3,14159; 3,141592;... вә и. а. гиймәтләрини көтүрүр вә расионал әдәдләр даирәсиндә һесабламалар эдирләр. Айдындыр ки, онлуг ишарәләринин сайыны нә гәдәр чох көтүрсәк, π әдәдинин һәгиги гиймәтинә бир о гәдәр дә яхын гиймәт көтүрмүш оларыг.

Лакин дәгиг элми тәдгигатларда, риязи ганунларын дүзкүн ифадә эдилмәсиндә, техниканын вә һәятын күнү-күндән артан тәләбләри гаршысында иррасионал әдәдләр һесабынын бөйүк вә һәллэдиҹи әһәмиййәти вардыр. Иррасионал әдәдләр һесабынын әсас әмәлләри топлама, чыхма, вурма, бөлмәдир. Лакин биз бу бәнддә һәгиги әдәдин ҹидди риязи тә'рифини билмәдиййимиздән онун үзәриндә эдиләҹәк әмәлләр һаггында ял-

ныз мүәййән тәсәввүрләр ярада билән тә'рифләрә мүрачиәт эдә биләрик.

Әввәлҹә ики сонсуз дөври онлуг кәсрлә ифадә эдилән расионал әдәдләрин ҹәминдән вә һасилиндән бәһс эдәк. Айдындыр ки, бу әдәдләри

$$\frac{p}{q} = p_0,\ p_1\ p_2 \ldots p_n \ldots;\quad \frac{r}{s} = q_0,\ q_1\ q_2 \ldots q_n \ldots$$

шәклиндә язмаг олар. Һәмин әдәдләрин әскийи вә артығы илә көтүрүлән тәгриби гиймәтләрини уйғун олараг a_n, a_n^1; b_n, b_n^1 илә ишарә этсәк

$$a_n < \frac{p}{q} < a_n^1,\ b_n < \frac{r}{s} < b_n^1$$

аларыг. Айдындыр ки, белә олдугда

$$a_n + b_n < \frac{p}{q} + \frac{r}{s} < a_n^1 + b_n^1$$

яза биләрик, йә'ни расионал әдәдләрин ҹәми онларын әксийи вә артығы илә көтүрүлмүш ихтияри уйғун тәгриби онлуг һиссәләринин ҹәми арасындадыр. Гейд этмәк лазымдыр ки, ялныз $\frac{p}{q} + \frac{r}{s}$ ҹәми һәмин хассәйә малик олан еканә расионал әдәддир. Инди тутаг ки, ихтияри ики

$$\alpha = \alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots,\ \beta = \beta_0,\ \beta_1\ \beta_2 \ldots \beta_n \ldots$$

һәгиги әдәдләри верилмишдир. Юхарыда олдуғу кими бу һәгиги әдәдләрин әксийи вә артығы илә көтүрүлән тәгриби онлуг һиссәләрини топлаяг:

$$a_n + a_n^1,\ b_n + b_n^1 \qquad (n = 1,\ 2, \ldots),$$

Исбат этмәк олар ки, n-ин ихтияри 1, 2, 3,... гиймәтләриндә бу ҹәмләр арасында олан

$$a_n + b_n < \gamma < a_n^1 + b_n^1$$

бәрабәрсизликләрини өдәйән еканә

$$\gamma = \gamma_0,\ \gamma_1\ \gamma_2 \ldots \gamma_n \ldots$$

һәгиги әдәди вардыр. Бу әдәдә α вә β һәгиги әдәдләрин *ҹәми* дейирләр:

$$\gamma = \alpha + \beta.$$

Аналожи олараг ики α вә β һәгиги әдәдләринин һасили тә'йин эдилир. Бу һалда a_n, a_n^1, $b_n \cdot b_n^1$ һасилләрини дүзәлдирләр вә $n = 1,\ 2,\ 3, \ldots$ гиймәтләриндә α, β һәгиги әдәдләрин һасили

$$a_n \cdot a_n^1 < \delta < b_n \cdot b_n^1$$

мүнасибәтини өдәйән еканә $\delta = \delta_0,\ \delta_1,\ \delta_2 \ldots\ \delta_n \ldots$ әдәдинә дейилир. Тутаг ки, α вә β ихтияри һәгиги әдәдләрдир вә $\alpha < \beta$-

дир. $\alpha<x<\beta$ бәрабәрсизлийини тә'мин эдән һәгиги әдәдләр чохлуғуна *интервал* дейилир вә (α, β) илә ишарә эдилир.

$\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ бәрабәрсизлийини өдәйән һәгиги әдәдләр чохлуғуна исә *парча* вә я *сегмент* дейилир вә $[\alpha, \beta]$ илә ишарә эдилир. Парча илә интервал бир-бириндән бунлары тә'йин эдән α, β әдәдләринин чохлуға дахил олуб, олмамасы илә фәргләнир. Мәсәлән, $0<x<1$ интервалыны $0 \leqslant x \leqslant 1$ парчасы (сегменти) илә мүгайисә этсәк әдәд оху үзәриндә 0 вә 1-и дахил олмадығы 0 илә 1 арасындакы әдәдләр чохлуғу интервал олур. 0 вә 1 бу чохлуға дахил олдугда исә парча алыныр. Юхарыда, расионал әдәдләр бәһсиндә дә биз интервал вә парчаны ялныз расионал әдәдләр чохлуғу даирәсиндә тә'риф этмишдик, бурада исә һәгиги әдәдләр чохлуғу даирәсиндә тә'йин этдик. Инди һәгиги әдәдләрин чох мүһүм бир хассәсини исбат эдәк. Исбат эдәк ки, һәр бир (α, β) интервалында һеч олмазса бир дәнә һәгиги әдәд вардыр.

Тутаг ки,

$$\alpha=\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots, \alpha_n \ldots$$

$$\beta=\beta_0, \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n \ldots$$

ики һәгиги әдәддир вә $\alpha<\beta$-дир. Бу ики һәгиги әдәдин сонсуз онлуг кәсрлә ифадәсинин һәр бириндә дөврдә 9 олмадығыны фәрз эдә билирик.

Тутаг ки, α вә β әдәдләринин бәрабәр олмаян биринчи онлуг ишарәсинин нөмрәси n-дир. Онда айдындыр ки, $\alpha_n<\beta_n$ олачагдыр, Тутаг ки, $\alpha_{n+m} \neq 9$ шәртини тә'мин эдән натурал әдәдләрдән ән кичийи m-дир. Белә бир m әдәди һәмишә вардыр, чүнки доггуз әдәди α вә β онлуг кәсрләринин дөврү дейилдир. Инди

$$\gamma=\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n \ldots \alpha_{n+m-1}$$

сонлу онлуг кәсрини нәзәрдән кечирәк. Шәртә көрә бу онлуг кәсрин $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}$ онлуг ишарәләри β онлуг кәсринин онлуг ишарәләри бәрабәр олур (чүнки, биринчи бәрабәр олмаян онлуг ишарәнин нөмрәси n-дир). α_n исә енә дә шәртә көрә β_n-дән кичикдир. Она көрә дә $\gamma<\beta$ олур. Дикәр тәрәфдән $\alpha<\gamma$-дир, чүнки α_{n+m-1}-ә кими α илә γ-нын бүтүн онлуг ишарәләри бәрабәр вә $\alpha_{n+m}<9$-дур. Демәли, $\alpha<\gamma<\beta$ олур, йә'ни һәгиги әдәдләр һәр ердә сыхдыр. Биз һәр ики һәгиги әдәдин арасында бир һәгиги әдәдин (расионал әдәдини) олдуғуну исбат этдик. Бу исбатдан иррасионал әдәдләр чохлуғунун әдәд оху үзәриндә сых олдуғу чыхмыр. Лакин тәкчә иррасионал әдәдләр чохлуғунун әдәд оху үзәриндә һәр ердә сых олдуғуну билаваситә исбат этмәк олар. Тутаг ки, r ихтияри расионал әдәддир. Белә олдугда $r \cdot \sqrt{2}$ шәклиндә олан бүтүн әдәдләр иррасионалдыр (лакин бүтүн иррасионал әдәдләр $r \cdot \sqrt{2}$ шәклиндә дейилдир).

Расионал әдәдләр чохлуғу, әдәд оху үзәриндә һәр ердә сых олдуғундан $r \cdot \sqrt{2}$ шәклиндә олан әдәдләр дә әдәд оху үзәриндә һәр ердә сыхдыр. Онда бүтүн иррасионал әдәдләр чохлуғу да әдәд оху үзәриндә һәр ердә сыхдыр.

II ҺИССӘ

АРДЫЧЫЛЛЫГЛАР ВӘ ЛИМИТЛӘР

§ 1. КӘМИЙЙӘТЛӘР ҺАГГЫНДА

Инсан өзүнүн күндәлик фәалиййәтиндә вә мүшаһидәләриндә заман, температур, узунлуг, һәчм, чәки, сүр'әт вә и. а. кими чохлу кәмиййәтләрә раст кәлир вә онлардан истифадә эдир.

Кәмиййәтләрин өлчүлә билмәк вә я әдәдләрлә ифадә олуна билмәк хассәсинин мүстәсна әһәмиййәти вардыр.

Риязиййатын башлыча вәзифәси кәмиййәтләри мигдарча өйрәнмәкдир.

Кәмиййәтләр тәбиәтләринә көрә ики гисмә айрылыр: 1) сабит кәмиййәтләр; 2) дәйишән кәмиййәтләр.

Дәйишмә просесиндә мүхтәлиф гиймәтләр алан кәмиййәтә *дәйишән кәмиййәт*, эйни гиймәт алан кәмиййәтә исә *сабит кәмиййәт* дейилир. Һаванын температуру, тәзйиги, һәрәкәт эдән чисмин кетдийи йол, дүзбучаглынын өлчүләриндән асылы олараг тә'йин эдилән саһәси дәйишән кәмиййәтләрдир. Үчбучагларын дахили бучагларынын чәми, чеврәләрин узунлуғунун диаметрләринә нисбәти, эйни бир мәһәлдә чисмин чәкиси вә и. а. сабит кәмиййәтләрдир.

Дәйишән кәмиййәтин верилмәси онун гиймәтләри чохлуғунун верилмәси демәкдир. Сабит кәмиййәтә дә эйни гиймәт алан дәйишән кәмиййәт кими бахмаг даһа мүнасибдир. Дәйишән кәмиййәтин лимитини тә'йин этмәк үчүн онун тәкчә гиймәтләри чохлуғуну билмәк кифайәт дейил, эйни заманда бу кәмиййәтин дәйишмә просесини дә билмәк лазымдыр.

Кәмиййәтләрин тәдгигинә көрә риязиййатын үмуми инкишаф тарихини ики бөйүк дөврә айырмаг олар:

Биринчи, йә'ни сабит кәмиййәтләрин тәдгиги дөврү, бу кәмиййәтләрә аид олан риязи ганунларын кәшфи вә үмумиләшмәси дөврүдүр. Икинчи йә'ни дәйишән кәмиййәтләрин тәдгиги дөврү исә онлара аид олан риязи ганунларын кәшфи вә үмумиләшдирилмәси дөврүдүр.

Бу дөврләри бир-бириндән гәт'и мүәййән эдилмиш сәрһәдлә вә кәскин чизкиләрлә айырмаг мүмкүн олмаса да, гисмән айырмаг мүмкүндүр.

Риязийятын инкишаф тарихинин биринчи дөврү бәшәр дүһасынын узун бир инкишаф тарихи дөврү олуб, гәдим заманлардан башлаяраг XVII əсрин орталарына гәдәр олан вахты әһатә эдир. Бу дөвр әрзиндә халгларын биркә сә'й вә ярадычылығы нәтичәсиндә риязийятын мөһтәшәм билик хәзинәси ярадылмышдыр. Һәндәсә, чәбр вә тригонометрия кими чидди мәнтиги әсаса, кениш тәдгигат саһәсинә малик олан риязи фәнләр һәмин хәзинәнин гиймәтли инчиләриндән ибарәтдир.

Мүәййән мә'нада тамамланмыш бу риязи фәнләрә ән'әнәви вә я шәрти олараг бирликдә *элементар (орта) риязийят* дейилир.

Риязийятын инкишаф тарихинин биринчи дөврүндә күлли мигдарда риязи ганунлар кәшф олунмуш вә бу ганунлар инсан эһтиячына табе эдилмишдир. Һәмин дөврдә гәт'и мүәййән эдилмиш фактларла янашы һәлл эдилмәси лазым олан мүһүм мәсәләләр дә мейдана чыхмышдыр. Бунлардан дәйишән сүр'әтли һәрәкәтин һәр андакы сүр'әтинин тә'йини, әйри хәтләрлә вә сәтһләрлә әһатә олунмуш фигур вә чисимләрин сәтһинин саһәсини, онларын һәчмләрини тапмаг кими әһәмиййәтли мәсәләләри көстәрмәк олар.

Риязийятын ени вә даһа күчлү методлары олмадан сонунчу мәсәләләри һәлл этмәк мүмкүн дейилдир. Ени методларын кәшфиндән әввәл бир нечә һәндәси фигурларын сәтһләрини вә я һәчмләрини һесабламаг мүмкүн иди. Мисал үчүн үчбучаг, квадрат, дүзбучаглы вә и. а. фигурларын саһәсини, кубун, призманын, паралелепипедин һәчмини тә'йин этмәк олурду.

Бу дөврүн өзүндә дә даһа мүррәккәб фигурларын саһәләрини вә һәчмләрини һесабламаг үчүн кәләчәкдә ишләдиләчәк үмуми методларын элементләри кәшф эдилмишдир. Мәсәлән, чеврәнин узунлуғу, даирәнин саһәсини һесабламаг үчүн ишләдилән үсул чидди риязи әсасландырылмаса да интуисия[1] йолу илә һесабланырды. Даһа мүрәккәб фигурларын саһәләрини һесабламаг мәсәләси исә бу дөврдә ачыг галмышдыр. Бело фигурларын саһәсини һесабламаг үчүн сонралар, икинчи дөврдә сонсуз кичиләнләр вә я лимитләр методу мүвәффәгиййәтлә ишләдилмишдир.

Икинчи дөвр, риязийятын XVII әсрдән сонракы инкишаф дөврү, онун ени дөврүдүр. Бу дөврдә риязийятын әски симасы дәйишәрәк тәбиәт һадисәләри даһа дәриндән, һәрәкәтдә, гаршылыглы әлагә шәраитиндә өйрәнилир.

---

[1]. Интуисия—бу вә я дикәр факты һисс этмәк вә дуймаг мә'насында ишләдилир.

Белә һадисәләрин өйрәнилиши, бу вә я дикәр дәйишән кәмиййәтләрин өйрәнилмәсинә кәтирилир. Беләликлә, дәйишән кәмиййәтләрин өйрәнилмәсинә кечмәк риязийятда ени эра ачыр вә элементар риязийятдан фәргләнәрәк һамысы бирликдә „али риязийят“ адланан үмуми риязи фәнләрин әсасы олан „риязи анализ“ фәнни ярадылыр. Риязи анализ фәнни методунун күчү вә енилийи, кәмиййәтләрин мигдарча тәһлилини онларын физики маһиййәти илә бағлы олмадан, үмуми шәкилдә өйрәнә билмәсиндәдир. Бурада кәмиййәтин физики маһиййәтиндән асылы олмаяраг үмуми шәкилдә мигдарча тәһлили, конкретликдән мүчәррәдлийә доғру бир аддымдыр. Һадисәләрин конкретликдән мәһрум үмумилийини өйрәнмәк риязийятын үстүн чәһәтидир. Адәтән риязийятда кәмиййәтин физики маһиййәтини нәзәрә алмаяраг, ону бир x һәрфи илә ишарә эдир вә үмуми шәкилдә онун табе олдуғу риязи ганунлары кәшф этмәйә чалышырлар. Хүсуси һалда бу кәмиййәт истәр заман, истәр мәсафә вә истәрсә дә температур кими конкрет кәмиййәтләр олдугда енә һәмин ганунлар өз күчүндә галыр. Бу ганунлары тәтбиг этдикдә конкрет кәмиййәтин уйғун ваһидләри ишләдилир. Мисал үчүн үчбучағын дахили бучагларынын чәминин ики дүз бучаға бәрабәр олмасы кими үмуми бир факты көстәрмәк олар. Бүтүн үчбучаглара аид олан бу факт, о чүмләдән конкрет верилән үчбучаға да аиддир. Демәли, конкретликдән мәһрум үмумилик риязийятын фөвгәл'адә мүчәррәдлийи вә я гейри-һәятилийи дейил, онун әлверишлилийи, йығчамлығы вә мөһтәшәмлийидир. Бу мәгсәдлә дә риязийятчылар һадисәләри даһа дүзкүн тәсвир вә изаһ эдә билән анлайышлара, метод ара вә үмумиләшдирмәләрә мүрачиәт эдир, бу һадисәләрин табе олдуғу ганунлары кәшф эдир вә онларын риязи дейилишини мүәййәнләшдирирләр. Һадисәләри тәдгиг этмәк үчүн һәр шейдән габаг бу һадисәләрин кедишиндә, төрәмәси вә инкишафында мүһүм рол ойнаян кәмиййәтләри мүәййән этмәк вә бу кәмиййәтләрин дәйишмә ганунуну өйрәнмәк лазымдыр.

Риязийята дәйишән кәмиййәт анлайышыны дахил этмәк зәрурәти бүтүн әзәмәти илә ени дөврүн тәләбләри сырасында дурур. Бу тәләбләр айры-айры риязийятчыларын шәхси тәләбләри, арзулары вә үмумиләшдирмәләри дейил, ени техниканын артан тәләбләри, онун инкишафынын тәләбләридир.

Беләликлә, риязийятын инкишафынын биринчи дөврү риязийята дәйишән кәмиййәт анлайышынын дахил эдилмәсилә битир; Декартын, Нютонун вә Лейбнисин тәдгигатлары илә зәнкинләшән ени риязийятын—риязи анализ методларынын эрасы башланыр. Бу тарихи һәгигәти Ф. Энкелс ашағыдакы образлы сөзләрлә белә демишдир: „Риязийята дәйишән кәмиййәт анлайышынын дахил эдилмәси онун дөнүм нөгтәси олду. Бунун нәтиҹәсиндә риязийята һәрәкәт вә диалектика дахил

эдилди, буна көрә дә дәрһал диференсиал вә интеграл һесабы зәрурәти мейдана чыхды"[1].

Сонсуз кичиләнләр вә я лимитләр методу риязи анализин әсас методу олуб ени һесабын кәскин силаһыдыр.

§ 2. ӘДӘДЛӘР АРДЫЧЫЛЛЫҒЫ ҺАГГЫНДА

Дәйишмә просесиндә бә'зи кәмиййәтләрин алдығы гиймәтләри ардычыл нөмрәләмәк мүмкүндүр, бә'зиләрини исә нөмрәләмәк мүмкүн дейилдир. Һәтта ади данышыг ифадәләриндә дә, чох вахт „әввәл кәлән", „сонра кәлән", „биринчи", „икинчи" кими сөзләр ишләдирик. Мәсәлән, бир күчәдә тикилән эвләрин өзүнә мәхсус нөмрәси вардыр; бөйүк нөмрәси олан эв, кичик нөмрәси олан эвдән сонра кәлир вә я кичик нөмрәси олан эв, бөйүк нөмрәси олан эвдән әввәл кәлир; яхуд китаб охуянда үчүнчү сәһифәдә язылан сөзләр йүзүнчү сәһифәдә язылан сөзләрдән әввәл кәлир. Беләликлә, бир сыра кәмиййәтләрин гиймәтләрини мүәййән низама салмаг олур. Бир нечә белә мисал кәтирсәк көрәрик ки, бунларын һамысынын табе олдуғу ашағыдакы ики аксиом мөвчуддур:

1) a, b, c кими үч әдәд, (яхуд үч элемент) верилмиш вә a-нын b-дән әввәл, b-нин c-дән әввәл кәлдийи мә'лумдурса, онда a-да c-дән әввәл кәләр.

2) әкәр a әдәди (вә я элементи) b-дән әввәл кәләрсә, онда b әдәди a-дан сонра кәләр.

Бунлара „низам аксиомлары" дейилир. Мәсәлән, дәйишән x кәмиййәтинин гиймәтләри ялныз натурал

$$1, 2, 3, \ldots n, \ldots \tag{1}$$

әдәдләриндән ибарәтдирсә, бу гиймәтләр чохлуғу низам аксиомларынын шәртини, йә'ни онун һәр үч һәдди биринчи аксиомун, һәр ики һәдди исә икинчи аксиомун тәләбләрини тә'мин эдир. Бунлардан әлавә (1) ардычыллығын биринчи элементи (бу элемент 1-дир) вә һәр элементдән сонра билаваситә бир элементи вардыр.

Гейд этмәк лазымдыр ки, низам аксиомларынын дейилишиндә „әввәл кәлән" вә я „сонра кәлән" әдәдләр дедикдә, үмумиййәтлә, онларын гиймәтләринин бөйүк вә я кичиклийи нәзәрдә тутулмур. Гиймәтләри низам аксиомларынын шәртләрини өдәйән кәмиййәтләрә низамлана билән кәмиййәтләр дейилир. Биз кәмиййәтләрин, үмумиййәтлә низамланмасындан данышмаячағыг.

Низамлана билән дәйишән кәмиййәтләр ичәрисиндә гиймәтләри натурал әдәдләр васитәсилә ардычыл нөмрәләнә билән кәмиййәтләрин хүсуси әһәмиййәти вардыр. Белә дәйишән x

[1] Энгельс, Диалектика природы, Госполитиздат 1948 г. сәһ. 208.

кәмиййәтини x_n илә ишарә едәчәйик. Бурада $n=1, 2, \ldots$ гиймәтләр алдыгда x_n дәйишән кәмиййәти ардычыл

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \tag{2}$$

кими гиймәтләр алыр. x_n кәмиййәтинин бу ардычыл гиймәтләринин өзүнә мәхсус ганунлары вардыр. Һәр шейдән әввәл (2) ардычыллығыны гураркән (1) натурал әдәдләр сырасындан истифадә етдик. Белә ки, (1) натурал әдәдләр сырасындан көтүрүлмүш n_1 натурал әдәдинә гаршы дәйишән x_n кәмиййәтинин мүәййән ганунла һәгиги x_{n_1} гиймәти гоюлур вә бу гиймәтләр ардычыл дүзүлүр; $n_2>n_1$ олдугда, ардычыллығын x_{n_2} һәдди x_{n_1}-дән сонра кәлир.

Гейд етмәк лазымдыр ки, һәр бир дәйишән кәмиййәтин алдығы гиймәтләри көстәрдийимиз гайда илә бир-биринин ардынча нөмрәләмәк мүмкүн дейилдир. Бә'зән натурал әдәдләр ардычыллығы кәмиййәтләрин алдығы гиймәтләри нөмрәләмәк үчүн кифайәт етмир. Мисал үчүн x кәмиййәти әдәд охунун 0 илә 1 әдәдләри арасындакы бүтүн расионал вә иррасионал гиймәтләри алса, онда алынан бу гиймәтләри бир-биринин ардынча нөмрәләмәк мүмкүн олмадығы мә'лумдур.

Дәйишән кәмиййәтин алдығы гиймәтләрдән юхарыдакы гайда илә әдәдләр ардычыллығы гурдуг. Инди әдәдләр ардычыллығынын дәгиг риязи тә'рифини верәк.

Тә'риф. Ашағыда көстәрилән хассәләрә малик олуб, ардычыллығын һәдләри адланан әдәдләр чохлуғуна *әдәдләр ардычыллығы* дейилир:

1) ардычыллығын һәдләринин һамысындан әввәл кәлән вә онун биринчи һәдди адланан, бир һәдди вардыр;

2) ардычыллығын һәдләринин һәр бириндән сонра билаваситә онун бир вә ялныз бир һәдди вардыр;

3) әксинә, биринчи һәдд мүстәсна олмагла ардычыллығын һәр һәддиндән әввәл билаваситә онун бир вә ялныз бир һәдди вардыр; белә ки, һәр һәддән әввәл ардычыллығын сонлу сайда һәдди вардыр.

Инди ардычыллыға вердийимиз тә'рифин тәләбләрини тәһлил едәк. Ардычыллығын тә'рифини нәзәрә алыб, онун һәдләрини сырая дүзсәк көрәрик: 1. Ардычыллығынын биринчи һәдди вардыр. 2. Ардычыллығын биринчи һәддән башга ихтияри һәддини тапмаг олар. Белә ки, биринчи һәддән сонра билаваситә кәлән һәдди, йә'ни икинчи һәдди; икинчи һәддән сонра билаваситә кәлән һәдди, йә'ни үчүнчү һәдди вә и. а. тапмаг вә һәдләрин бу гайда илә тапылмасыны сонсуз сурәтдә давам етдирмәк олар. Беләликлә, ардычыллығын сонсуз сайда һәдди олдуғу гәнаәти һасил едилир. 3. Ардычыллығын һәр һәддиндән габаг нечә һәдд олдуғуну көстәрән нөмрә вардыр.

Бу хассәләри башга сөзлә ифадә етсәк демәлийик ки, ардычыллығын n-чи һәддини тапмаг үчүн биринчи һәддән башлая-

раг ардычыллығын $n-1$ һәддини ардычыл сурәтдә тапмаг лазымдыр.

Ардычыллыглар мүхтәлиф олур. Бунлардан бә'зиләри n-чи һәдди (юхарыдакы (2) ардычыллығында буну x_n илә ишарә этмишдик) верилмәсилә гурула билир, белә һәддә *ардычыллығын үмуми һәдди* дейилир. Бә'зиләринин исә бүтүн һәдләри верилир. Бир нечә мисал көстәрәк:

$$1\cdot 2,\ 2\cdot 3,\ 3\cdot 4,\ \ldots,\ n\ (n+1),\ \ldots$$

бу ардычыллыгда $x_n = n\ (n+1)$ ифадәси үмуми һәддир. Доғрудан да, $n=1$ оланда $x_1 = 1\ (1+1) = 1\cdot 2$; $n=2$ оланда $x_2 = 2\ (2+1) = 2\cdot 3$; $n=3$ оланда $x_3 = 3\ (3+1) = 3\cdot 4$ вә и. а. Бу гайда илә ардычыллығын бүтүн һәдләрини әлдә эдәрик.

$$1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{16},\ \ldots,\ \frac{1}{n^2},\ \ldots,$$

ардычыллығында исә үмуми һәдд $x_n = \frac{1}{n_2}$-дир. Доғрудан да, $n=1$ оланда биринчи һәдд $x_1 = \frac{1}{1^2} = 1$ олар. $n=2$ оланда икинчи һәдд $x_2 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ олар. $n=3$ оланда үчүнчү һәдд $x_3 = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$ олар вә и а.

Чүт әдәдләр. 2, 4, 6, . . . ардычыллығыны нәзәрдән кечирмиш олсаг, бурада үмуми һәддин $x_n = 2n$ олдуғуну сөйләйә биләрик.

Тәк әдәдләр. 1, 3, 5 . . . ардычыллығын үмуми һәдди $x_n = 2n-1$ олар.

Лакин үмуми һәддин верилмәсилә ардычыллығы гурмаг вә ардычыллығын верилмәсилә онун үмуми һәддини тапмаг бир чох ардычыллыглара хас дейилдир. Мисал үчүн әсли әдәдләр ардычыллығыны[1] нәзәрдән кечирәк. Юхарыдакы ардычыллыглардан фәргли олараг:

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ \ldots$$

ардычыллығы үчүн n нөмрәли һәддин үзәриндә эдиләчәк элә сонлу сайда чәбри әмәлләри көстәрмәк мүмкүн дейилдир ки, бу әмәлләр васитәсилә ардычыллығын үмуми һәддини (x_n-и) тә'йин этмәк мүмкүн олсун. Бу һеч дә о демәк дейилдир ки, биз белә һалларда ардычыллыг сөзүнү ишләтмәлийик.

Инди бә'зи хүсуси вә һәм дә мүстәгил әһәмиййәти олан әдәдләр ардычыллығындан бәһс эдәк.

---

[1] Әсли эдәдләрин сонсуз сайда олдуғу китабын I һиссәсиндә исбат эдилмишдир.

§ 3. ӘДӘДИ СИЛСИЛӘ

Тутаг ки,

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots \tag{1}$$

әдәдләр ардычыллығы верилмишдир, belә ки, бу ардычыллығын биринчи һәддиндән сонра кәлән һәр бир һәдди, өзүндән билаваситә габаг кәлән һәдлә, бу ардычыллыг үчүн сабит олан мүәййән бир мүсбәт вә я мәнфи әдәдин чәминә бәрабәрдир. Бу сабит әдәди d илә ишарә эдәк. Бу гайда илә тә'йин эдилән әдәди ардычыллыға *әдәди силсилә* вә d әдәдинә әдәди силсиләнин *фәрги* дейилир[1]. Әдәди силсиләнин тә'рифини нәзарә алсаг:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d \\ a_3 &= a_2 + d \\ &\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots \\ a_n &= a_{n-1} + d \end{aligned} \tag{2}$$

мүнасибәтини әлдә эдәрик. Айдындыр ки, $d = a_k - a_{k-1}$ $(k = 2, 3, \ldots)$ олар. Әдәди силсиләнин һәдләри биринчи һәддән башлаяраг артдыгда бу силсиләйә *артан әдәди силсилә*, азалдыгда исә *азалан әдәди силсилә* дейилир. Мәсәлән,

$$2;\ 3{,}5;\ 5;\ 6{,}5;\ 8;\ \ldots$$

артан әдәди силсиләдир. Бу әдәди силсиләнин һәдләр фәрги,

$$d = 3{,}5 - 2 = 5 - 3{,}5 = \ldots = 1{,}5 \text{ олар.}$$

$$8,\ 4,\ 0,\ -4,\ -8,\ -12,\ \ldots$$

әдәди силсилә исә азалан әдәди силсиләдир. Бунун һәдләр фәрги $d = 4 - 8 = -4 - 0 = -12 - (-8) = \ldots = -4$ олар.

1. Әдәди силсиләнин үмуми һәддинин формулу

(1) әдәди силсиләнин үмуми һәддинин формулуну асанлыгла әлдә этмәк олар. Бунун үчүн (2) мүнасибәтиндә һәр әввәл кәлән бәрабәрлийи сонракы бәрабәрликләрдә еринә язаг:

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d,$$
$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$$

бу гайда илә давам этсәк

$$a_n = a_1 + (n-1)\,d \tag{3}$$

формулуну аларыг.

Әдәди силсиләнин үмуми һәддинин (3) формулундан көрүндүйү кими a_1, a_n, n вә d кими дөрд элементдән ихтияри үчү

[2] Силсиләләрә аид илк мәсәләләрә Ринд папирусларында раст кәлмәк олур.

мә'лум икән, (3) формулу васитәсилә дөрдүнчүнү тапмаг олар.
Мәсәлән,

$$1;\ 2{,}5;\ 4;\ \ldots$$

силсиләсиндә һәдләр фәрги $d = 1{,}5$-дир. Силсиләнин он бешинчи һәддинин тапылмасы тәләб эдилир. Үмуми һәдд формулуна көрә

$$a_{15} = 1+1{,}5\ (15-1) = 1+1{,}5\cdot 14 = 1+21 = 22 \text{ олур.}$$

2. Кәнар һәдләрдән эйни узаглыгда дуран һәдләрин хассәси

Инди әдәди силсиләнин биринчи n һәддини нәзәрдән кечирәк (n—ихтияридир);

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n. \tag{4}$$

Бу силсиләнин бә'зи хассәләрини көстәрәк: әдәди силсиләнин биринчи n һәддинин ичәрисиндә биринчи вә сонунчу һәдләрдән эйни узаглыгда олан ики һәддин чәми, силсиләнин биринчи вә сонунчу һәдләринин чәминә бәрабәрдир.

Бу тәклифи исбат эдәк. Әкәр (1) әдәди силсиләсинин биринчи n һәдди арасында һәдләр фәрги d исә, бу силсиләнин һәдләрини тәрсинә дүзмүш олсаг

$$\ldots\ a_n,\ a_{n-1},\ a_{n-2},\ \ldots,\ a_1, \tag{5}$$

һәдләринин фәрги—d олан әдәди силсилә аларыг. Доғрудан да, бурада $a_{n-1} - a_n = -\ (a_n - a_{n-1}) = -d$ олар.

Айдындыр ки, биринчи n һәддин тәрсинә дүзүлүшүндә a_n биринчи һәдд, a_1 исә сонунчу һәддир. (4) дүзүлүшүндә k-чы ердә дуран һәдди $a_k = a_1 + (k-1)\ d$ формулу васитәсилә тапа биләрик. Һәмин дүзүлүшдә ахырынчы a_n һәддиндән солда k-чы ердә дуран һәдди һесабламаг үчүн (5) дүзүлүшүндән истифадә этмәк олар. Бунун үчүн a_n-ин үзәринә $(k-1)\ (-d)$ һәддини кәлмәк лазымдыр:

$$a_n - (k-1)\ d.$$

Алынан бу ики һәдди топласаг:

$$a_1 + (k-1)\ d + a_n - (k-1)\, d = a_1 + a_n$$

алынар. Бунунла, көстәрдийимиз хассә исбат эдилмиш олур. Мисал үчүн 1-дән 100-ә гәдәр чүт әдәдләр ардычыллығынын һәдләрини көтүрәк. Ахырдан 41-чи һәдлә әввәлдән 41-чи һәддин чәмини һесаблаяг. Айдындыр ки, бу һалда биринчи һәдд 2, ахырынчы һәдд 100, һәдләр фәрги исә $d = +2$ олар. Һәдләри тәрсинә дүздүкдә исә $d = -2$ олар. Әввәлдән 41-чи һәдд

$$2 + (41-1)\ 2 = 2 + 40\cdot 2 = 82$$

ахырдан 41-чи һәдд исә:

$$100 - (41-1)\ 2 = 100 - 80 = 20$$

олар. Инди алынан әдәдләри топласаг $82+20=102$ аларыг.

Биринчи һәдлә ахырынчы һәддин чәми дә $2+100=102$ олдуғу айдын көрүнүр.

3. Әдәди силсиләнин биринчи n һәддинин чәми

(1) ардычыллығынын биринчи n һәддинин чәмини s_n илә ишарә едәк:

$$s_n = a_1+a_2+a_3+ \ldots +a_{n-2}+a_{n-1}+a_n$$

Еләчә дә,

$$s_n = a_n+a_{n-1}+ \ldots + a_3+a_2+a_1$$

олар.

Бу ики бәрабәрлийи тәрәф-тәрәфә чәмләсәк:

$$2s_n = (a_1+a)_n+(a_2+a_{n-1})+(a_3+a_{n-2})+ \ldots + \\ +(a_{n-1}+a_2)(a_n+a_1)$$

аларыг. Юхарыда исбат етдийимиз хассәйә көрә

$$a_1+a_n = a_2+a_{n-1} = \ldots$$

олдуғундан

$$2s_n = (a_1+a_n)\cdot n$$

вә я

$$s_n = \frac{a_1+a_n}{2}\cdot n \qquad (6)$$

олар. Беләликлә, ашағыдакы нәтичәни әлдә едирик. **Әдәди силсиләнин биринчи n һәддинин чәми, биринчи вә сонунчу һәдләри чәминин ярысы илә һәдләри сайынын һасилинә бәрабәрдир.**

Силсиләнин үмуми һәддинин дүстуруну нәзәрә алсаг, онун биринчи n һәддинин чәми формулу, йә'ни (6) формулу

$$s_n = \frac{a_1+a_1+(n-1)d}{2}\cdot n = \frac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$$

шәклинә дүшәр.

Мисаллар. 1. Биринчи n дәнә натурал әдәдин чәмини тапын.

Айдындыр ки, белә әдәди силсиләнин биринчи һәдди $a_1=1$, һәдләр фәрги $d=1$, n-чи һәдди исә $a_n=n$ олар. Бу әдәди силсиләнин биринчи n һәддинин чәми исә

$$s_n = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(1+n)}{2}$$

формулу илә тә'йин олунур.

2. Биринчи n дәнә тәк әдәдин чәмини тапын. Айдындыр ки, тәк әдәдләр ардычыллығы, һәдләринин фәрги $d=2$ олан әдәди силсилә тәшкил едир. Бу силсиләнин биринчи һәдди

$a_1 = 1$, n-чи һәдди исә $a_n = 1 + (n-1)\cdot 2 = 2n - 1$-дир. Биринчи n һәддинин ҹәми (6) формулуна әсасән

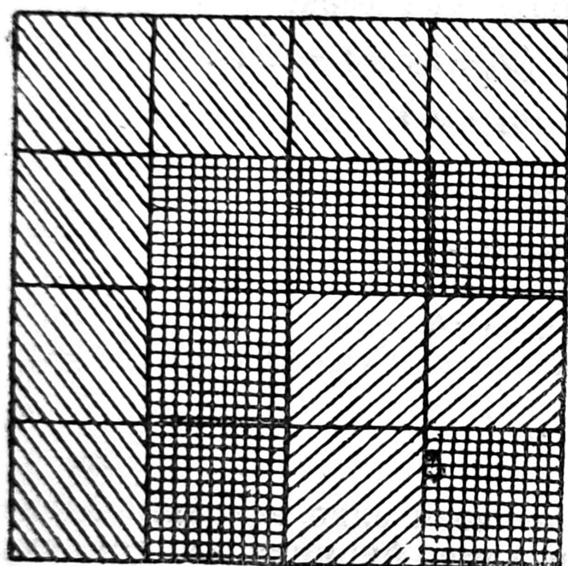
$$s_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = \frac{2 + (n-1)\cdot 2}{2}\cdot n = n^2$$

олар.

Демәли:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2.$$

Натурал әдәдләр ардычыллығында биринчи n дәнә тәк әдәдин ҹәмини һәндәси изаһ едәк. Тәрәфи n олан квадратын саһәсинин n^2 олдуғуну нәзәрә алсаг, тәк әдәдләрин ҹәмини ашағыдакы кими изаһ едә биләрик. Садәлик үчүн $n = 4$ олсун. Белә квадратда тәрәфи 1-ә бәрабәр олан 16 квадрат ерләшир. Дикәр тәрәфдән $1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$ олдуғу биринчи 4 тәк әдәдин ҹәминин формулундан айдын көрүнүр. Әкәр тәрәфи 4 ваһид олан квадратын тәрәфләрини 4 бәрабәр ерә бөлсәк вә бөлкү нөгтәләрини гаршы тәрәфләрдәки уйғун нөгтәләрлә бирләшдирсәк, тәрәфи ваһид олан 16 квадрат әлдә едәрик (9-чу шәкил). $1 + 3 + 5 + 7$ ҹәми шәкилдә көстәрдийимиз квадратын ашағы сағ учдан башлаяраг гараланан саһәләрин ҹәмини көстәрир. Ҹәмин биринчи һәдди ашағы сағ учдакы квадратын саһәсини, икинчи һәдди ону дахилинә алан гараланан үч квадратын саһәсини, үчүнҹү һәдди ахырынҹы дөрд квадраты дахилинә алан беш квадратын саһәсини, дөрдүнҹү һәдди исә гараланан 9 квадраты дахилинә алан 7 квадратын саһәсини көстәрир.



9-чу шәкил

4. Әдәди орта

Инди бир нечә әдәдин әдәди орта гиймәтини тә'йин едәк вә онун бә'зи хассәләрини көстәрәк.

Тә'риф. $a_1, a_2, \cdots, a_n$ әдәдләринин әдәди орта гиймәти бу әдәдләрин ҹәбри ҹәминин һәмин әдәдләрин сайына бөлүнмәсиндән алынан әдәдә дейилир, йә'ни,

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

верилмиш әдәдләрин әдәди орта гиймәтидир.

1-чи хассә. a, b әдәдләринин $\frac{a+b}{2}$ әдәди орта гиймәти васитәсилә дүзәлән a, $\frac{a+b}{2}$, b һәдләри әдәди силсиләнин һәдләридир.

Доғрудан да,

$$\frac{a+b}{2}-a=\frac{b-a}{2}$$

$$b-\frac{a+b}{2}=\frac{b-a}{2}.$$

Демәли, бу әдәди силсиләнин һәдләр фәрги $d=\frac{b-a}{2}$-дир.

2-чи хассә. Әкәр $a_1, a_2, \cdots, a_n$ мүәййән әдәди силсиләнин биринчи n һәддидирсә, онда бунун ардычыл көтүрүлмүш һәр үч һәддиндән икинчи һәдди биринчи илә үчүнчүнүн әдәди орта гиймәтиндән ибарәтдир.

Тутаг ки, верилмиш әдәди силсиләнин һәдләри фәрги d-дир. Онда

$$d=a_m-a_{m-1},$$
$$d=a_{m+1}-a_m$$

олур. Бурадан:

$$a_m=a_{m-1}+d,$$
$$a_m=a_{m+1}-d$$

олдуғу ашкардыр. Ахырынчы бәрабәрликләри тәрәф-тәрәфә топласаг

$$2a_m=a_{m-1}+a_{m+1}$$

вә я

$$a_m=\frac{a_{m-1}+a_{m+1}}{2}$$

олар. Бу исә әдәди силсиләнин a_m $(m=2, 3, \ldots, n)$ һәддинин кәнар a_{m-1}, a_{m+1} һәдләрин әдәди орта гиймәти олдуғуну көстәрир.

3-чү хассә. Верилмиш ики a, b әдәдләри арасына бу әдәдләрлә әдәди силсилә тәшкил едән n дәнә әдәд дахил етмәк олар. Бу тәклифин исбатыны бир мисал үзәриндә нүмайиш етдирәк.

Мисал. 2 вә 14 әдәдләри арасына бунларла әдәди силсилә тәшкил едән беш әдәд дахил един.

Бу әдәдләри x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 илә ишарә едәк. Шәртә көрә һәмин әдәдләр елә олмалыдыр ки,

$$2, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, 14$$

мүәййән бир әдәди силсиләнин һәдләри олсун. Бу әдәди силсиләнин һәдләр фәргини d илә ишарә этсәк:

$$x_1 = 2 + d,\ x_2 = 2 + 2d,\ x_3 = 2 + 3d,\ x_4 = 2 + 4d,$$
$$x_5 = 2 + 5d,\ 14 = 2 + 6d$$

аларыг. Ахырынчы бәрабәрликдән һәдләр фәргини һесаблая биләрик:

$$d = \frac{14 - 2}{6} = 2.$$

Онда,

$$x_1 = 4,\quad x_2 = 2 + 4 = 6,\quad x_3 = 2 + 6 = 8,$$
$$x_4 = 2 + 8 = 10,\quad x_5 = 2 + 10 = 12$$

олар.

Беләликлә, 2 вә 14 әдәдләри арасына бу әдәдләрлә әдәди силсилә тәшкил эдән беш әдәд дахил этдик:

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14.$$

Мисаллар. 1. Бүтүн икирәгәмли әдәдләрин чәмини тапын.

Айдындыр ки, биринчи икирәгәмли әдәд 10-дур, йә'ни $a_1 = 10$, икирәгәмли әдәдләр һәдләринин фәрги $d = 1$ олан әдәди силсиләнин һәдләридир.

Бүтүн икирәгәмли әдәдләрин сайы 90, ахырынчы икирәгәмли әдәд исә 99-дур, онда

$$s_{90} = \frac{10 + 99}{2} \cdot 90 = 4905.$$

2. Зәнкли саат 24 саатда нечә дәфә зәнк вурар (бу мәсәләнин һәлли охучулара тапшырылыр). Чаваб 180.

3. Бир әдәди силсиләнин биринчи һәдди 1-дир. Биринчи m һәддинин чәминин биринчи n һәдди чәминә нисбәти исә $m^2 : n^2$ кимидир. Силсиләни гурун. Чаваб $d = 2$.

4. Фәрги d олан бир әдәди силсиләнин һәдләри $a_1, a_2, \cdots a_n$-дир.

$$s = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$$

чәмини тапын.

Көстәриш. Әввәлчә $(a_1 + d)^3, \cdots, (a_n + d)^3$ һәдләрини ачын, сонра шәртдән истифадә эдин. Чаваб

$$na_1a_n + \frac{n(n-1)(2n-1)}{2} \cdot n^2.$$

5. **Тарихи мәсәлә.** Гәдим Мисир мәсәләләринин бириндә белә дейилир; 5 адамын арасында 100 емәк элә бөлүнмәлидир ки, онларын һәр биринин алдығы емәкләрин сайы әдәди силсиләнин һәдләри олсун. Бундан әлавә биринчи үч адам тәрәфиндән алынан емәкләрин сайынын $\frac{1}{7}$ һиссәси, сонунчу ики адам тәрәфиндән алынан емәкләрин сайына бәрабәр олсун. Һәр бир адамын нечә емәк алдығы сорушулур.

Кечмишдә һәмин мәсәләнин мүәллифи мәсәләни белә һәлл этмишдир. Фәрз эдәк ки, ахырынчы адам бир емәк, ондан габагкы адам исә $6\frac{1}{2}$ емәк (сәбәби көстәрилмәдән) алмышдыр. Сонра әдәди силсилә дүзәлдәрәк мүәллиф давам этмишдир. Бу гайда илә дүзәлдилмиш әдәди силсиләнин һәдләри чәми вә я адамларын алдығы емәкләрин сайы 60 олур (кәрәк 100 емәк ола иди!). Мәсәләнин һәллинин мүәллифи гейд эдир ки, дүзкүн чаваб алмаг истәйәнләр алынан һәр емәйин сайыны 100-үн 60-а нисбәти дәфә артырмалыдыр.

Верилән мәсәләни һәлл этмәли вә мүәллифин һәлли илә мүгайисә этмәли. Чаваб $38\frac{1}{3}$, $29\frac{1}{6}$, 20, $10\frac{5}{6}$, $1\frac{2}{3}$.

§ 4. ҺӘНДӘСИ СИЛСИЛӘ

Инди башга бир хүсуси ардычыллыгдан бәһс эдәк. Юхарыда биринчи һәддән башлараг һәр сонракы һәдд өзүндән билавәситә габаг кәлән һәдлә бүтүн һәдләр үчүн сабит олан бир әдәдин чәминә бәрабәр олан хүсуси ардычыллыгдан бәһс этдик вә бу ардычыллығы әдәди силсилә адландырдыг.

Инди фәрз эдәк ки,

$$a_1, a_2, a_3 \ldots, a_n, \ldots \qquad (1)$$

ардычыллығында биринчи һәддән башлараг ардычыллығын һәр сонракы һәдди әввәлки һәдлә бүтүн ардычыллыг үчүн сабит олан бир мүсбәт вә я мәнфи әдәдин һасилинә бәрабәрдир. Белә ардычыллыға *һәндәси силсилә*, ардычыллығын сабит вуруғуна исә һәндәси силсиләнин *ортаг вуруғу* дейилир. Бу тә'рифи нәзәрә алсаг (1) ардычыллығынын һәдләринин ашағыдакы хассәләрә малик олдуғуну көрәрик.

1. Һәндәси силсиләнин үмуми һәддинин формулу

Тутаг ки, q һәндәси силсиләнин ортаг вуруғудур. Онда

$$a_2 = a_1q, \; a_3 = a_2q, \ldots, a_n = a_{n-1}\cdot q, \ldots \qquad (2)$$

мүнасибәтләрини алырыг. (2) ардычыллығында һәр әввәлки һәдди сонракы һәддә еринә язсаг

$$a_2 = a_1\cdot q, \quad a_3 = a_1\cdot q^2, \ldots, a_n = a_1\cdot q^{n-1}, \ldots \qquad (3)$$

аларыг; бурада

$$a_n = a_1\cdot q^{n-1} \qquad (4)$$

һәддинә (2) ардычыллығынын *үмуми һәдди* дейилир. n нөмрәсинә 1, 2, вә и. а. натурал гиймәтләр версәк (4) формулу васитәсилә (3) ардычыллығынын бүтүн һәдләрини әлдә эдәрик. Һәндәси силсиләйә аид бир нечә мисал вә мәсәләләр көстәрәк.

1. **Тарихи мәсәлә.** Рәвайәтә көрә һинд шаһзадәси Сирам шаһматы ичад едән шәхси өз янына дә'вәт едәрәк онун ихтира етдийи оюна көрә һәр нә арзу едәрсә, бу арзу илә мүкафатланачағыны дедикдә шаһматы ичад едән шәхс буғда илә мүкафатландырылмасыны истәмишдир. Белә ки, шаһмат тахтасынын биринчи ханәси үчүн бир буғда дәнәси, икинчи ханәси үчүн ики, үчүнчүсү үчүн дөрд вә с. һәр кәлән ханәйә әввәлкиндәи ики дәфә артыг буғда дәнәси верилмәсини хаһиш етмишдир. Шаһзадә бу мүкафатын верилмәсинә разы олмуш вә сорушмушдур ки, буна нә гәдәр буғда верилмәлидир?

Шәртә көрә һәр ханәдәки буғда дәнәләринин сайы өзүндән әввәл кәлән ханәдәкиндән ики дәфә чохдур. Шаһмат тахтасынын 64 ханәси олдуғундан һесаб едәчәйимиз һәдләрин сайы 64 олачагдыр:

Тәләб едилән буғданын мигдарыны тә'йин етмәк үчүн кестәрилән 64 һәдди топламалыйыг:

$$1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ \ldots,\ 2^{63}$$

һәмин чәми белә дә яза биләрик:

$$s = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{63}.$$

Бурада икинчи һәддән башлаяраг ортаг 2 вуруғуну мө'тәризә харичинә чыхардаг. Мө'тәризә ичәрисиндә олан чәмин $s - 2^{63}$ бәрабәр олдуғу айдын көрүнүр. Беләликлә,

$$s = 1 + 2(s - 2^{63})$$

вә я

$$s = 1 + 2s - 2^{64},$$

$$s = 2^{64} - 1$$

алмыш олуруг.

Бу гайда илә вериләчәк буғданын мигдары 2^{64} гүввәтинин һесабланмасына кәтирилир. Буну да я ардычыл вурма йолу илә вә я да

$$2^{64} = [(2^{16})^2]^2 = [(65536)^2]^2$$

шәклиндә һесабламаг лазым кәлир. Әкәр сонунчу квадрата йүксәлтмә әмәлләрини дә етмиш олсаг:

$$s = 2^{64} - 1 = 18446744073709551615$$

аларыг. Бу гәдәр буғда дәнәләрини ер үзүнә бәрабәр дөшәмиш олсаг 9 *мм* галынлығында буғда тәбәгәси мейдана кәлмиш олар.

Шүбһәсиздир ки, шаһзадә белә бир бәхшиши верә билмәмишдир. Бу ардычыл гиймәтләрдә көрүнән үмуми гануна көрә һәр сонра кәлән һәдди тапмаг үчүн әввәлки һәдди икийә вурмаг лазым кәлир. Бурада алынан һәндәси силсиләнин ортаг вуруғу $q = 2$-дир.

2. $1, -1, 1, -1, \ldots$ әдәдләр ардычыллығы да һәндәси силсиләдир. Бурада биринчи һәдд $a_1 = 1$, ортаг вуруг $q = -1$, үмуми һәдд исә $a_n = (-1)^{n-1}$-ә бәрабәр олдуғу айдын көрү-

нур. $n = 1, 2, \ldots$ гиймәтләр версәк һәндәси силсиләнин бүтүн һәдләрини әлдә едә биләрик. Доғрудан да,

$$a_1 = (-1)^{1-1} = (-1)^0 = 1,$$
$$a_2 = (-1)^{2-1} = (-1)^1 = -1,$$
$$a_3 = (-1)^{3-1} = (-1)^2 = 1 \text{ вә и. а.}$$

3. $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}$ силсиләсини нәзәрдән кечирәк. Бу силсиләдә

$$a_1 = 1, \quad q = -\frac{1}{2}, \quad a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}.$$

Доғрудан да n-ә натурал гиймәтләр вермәклә силсиләнин бүтүн һәдләрини әлдә едә биләрик.

$$a_1 = \frac{(-1)^{1-1}}{2^{1-1}} = \frac{(-1)^0}{2^0} = \frac{1}{2},$$
$$a_2 = \frac{(-1)^{2-1}}{2^{2-1}} = \frac{(-1)^1}{2^1} = -\frac{1}{2},$$
$$a_3 = \frac{(-1)^{3-1}}{2^{3-1}} = \frac{(-1)^2}{2^2} = \frac{1}{4}$$

вә и. а.

Юхарыдакы мисаллары нәзәрдән кечирсәк көрәрик ки, бу силсиләләрин бә'зиләриндә биринчи һәддән сонра кәлән һәдләр биринчи һәддән узаглашдыгча онларын мүтләг гиймәти артыр, бә'зиләриндә сабит галыр, бә'зиләриндә исә һәдләрин мүтләг гиймәти азалыр.

Тә'риф. Әкәр бир һәндәси силсиләнин һәдләри, сыра нөмрәси артдыгча мүтләг гиймәтчә артарса, бу һәндәси силсиләйә *артан,* әксинә олараг силсиләнин һәдләри, сыра нөмрәси артдыгча мүтләг гиймәтчә азаларса она *азалан һәндәси силсилә* дейилир. Айдындыр ки, артан һәндәси силсиләдә ортаг вуруг мүтләг гиймәтчә 1-дән бөйүк, йә'ни $|q| > 1$, азаланда исә ортаг вуруг мүтләг гиймәтчә 1-дән кичикдир. Гейд едәк ки, һәндәси силсиләнин үмуми һәддинин формулуна, йә'ни (4) формулуна a_1, q, n вә a_n дахилдир. Һәмин әдәдләрдән үчүнү билсәк дөрдүнчүнү бу формулун көмәйи илә тапа биләрик вә дөрд нөв мәсәлә вә я мисал һәлл едә биләрик.

1) 7, 21, 63, . . . һәндәси силсиләсиндә $a_1 = 7$, $a_2 = 21$ олдуғундан $a_2 = a_1 \cdot q$, $21 = 7 \cdot q$ олар. Бурадан $q = \frac{21}{7} = 3$ алынар. Силсиләнин бешинчи һәддинин тапылмасы лазым кәлсә (4) формулунда $q = 3$ языб һәмин һәдди һесаблая биләрик:

$$a_5 = 7 \cdot 3^4 = 7 \cdot 81 = 567.$$

2) тутаг ки, бир һәндәси силсиләдә

$$a_n = 384, \quad a_1 = 1,5, \quad q = 4.$$

n-и, йә'ни һәдләрин сайы тапылмалыдыр.

Енә дә (4) формулуна көрә яза биләрик: $384 = 1,5 \cdot 4^{n-1}$, йә'ни $4^{n-1} = \frac{384}{1,5} = 256 = 4^4$, демәли, $n - 1 = 4$ вә я $n = 5$ олар.

2. Һәндәси орта

Инди ики вә бир нечә әдәдин һәндәси орта гиймәтини тә'йин эдәк. Тутаг ки, a, b мүсбәт әдәдләри верилмишдир.

Тә'риф. $+\sqrt{ab}$ әдәдинә a вә b әдәдләринин һәндәси орта гиймәти дейилир.

Һәмин тә'рифә истинад эдәрәк әдәдләрин һәндәси орта гиймәтинин бә'зи хассәләрини көстәрәк.

1-чи хассә. a, $+\sqrt{ab}$, b бир һәндәси силсиләнин һәдләридир. Бу тәклифин доғрулуғу $\frac{+\sqrt{ab}}{a} = \frac{b}{+\sqrt{ab}}$ бәрабәрлийиндән көтүрүлүр.

2-чи хассә. Тутаг ки, a_1, a_2, . . . , a_{m-1}, a_m, a_{m+1}, . . . мүсбәт әдәдләрдән ибарәт вә ортаг вуруғу q олан һәндәси силсиләдир. Бу силсиләнин һәр үч һәддиндән икинчи һәдди биринчи һәдди илә үчүнчү һәддин һәндәси орта гиймәтиндән ибарәтдир.

Һәндәси силсиләнин тә'рифинә көрә бир тәрәфдән $a_m = a_{m-1} \cdot q$, дикәр тәрәфдән $a_m = \frac{a_{m+1}}{q}$.

Бу ики бәрабәрлийи тәрәф-тәрәфә вурсаг $a_m^2 = a_{m-1} \cdot a_m$ бәрабәрлийини аларыг. Бурадан исә $a_m = +\sqrt{a_{m-1} \cdot a_m}$ алынар.

Ики әдәдин һәндәси орта гиймәтинә верилән тә'рифи үмумиләшдирсәк, демәк олар ки, a, b, c, . . . , l кими n дәнә мүсбәт әдәдин һәндәси орта гиймәти $+\sqrt[n]{a \cdot b \cdot c \ . \ . \ . \ l}$ көкүнә дейилир.

Мисаллар. 1. Бир дүзбучаглы үчбучағын тәрәфләринин узунлуглары һәндәси силсиләнин һәдләри ола биләрми?

Тутаг ки, үчбучағын тәрәфләринин узунлуғу a, b, c-дир, беләки, $a < b < c$. Әкәр бу әдәдләр һәндәси силсиләнин һәдләридирсә, онда гейд этдийимиз хассәйә көрә

$$b^2 = ac \qquad (*)$$

олар. Үчбучаг дүзбучаглы олдуғуна көрә

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad (5)$$

олмалыдыр. Бу ики (*) вә (5) тәнликләрини биркә һәлл этсәк, бир тәрәфдән $a^2 + ac = c^2$, йә'ни $c^2 - ac - a^2 = 0$ олар, бурадан $c = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2} = \frac{a + a\sqrt{5}}{2}$

вә я

$$c = \frac{a}{2}(1 + \sqrt{5}). \qquad (6)$$

Дикәр тәрәфдән исә

$$b^2 = ac = \frac{a^2}{2}(1 + \sqrt{5})$$

вә я

$$b = \frac{a}{2}\sqrt{2(1 + \sqrt{5})} \qquad (7)$$

олар. Демәли, (6) вә (7) шәртләри юхарыдакы әлавә шәртләр дахилиндә дүзбучаглы үчбучағын тәрәфләринин узунлуғу олан a, b, c бир һәндәси силсиләнин һәдләри олмасы үчүн зәрури шәртдир. Бу шәртләр һәм дә кафидир. Ашағыдакы мисалларын һәллэдилмәси охучулара тапшырылыр.

2. Һансы дүзкүн үчбучағын отурачағы, һүндүрлүйү саһәсинин өлчүләри һәндәси силсилә тәшкил эдә биләр? **Чаваб.** Тәрәфләрин узунлуғу $\sqrt{3}$ олан үчбучаг.

3. Бир һәндәси силсиләнин һәдләри a, b, c, d оларса,

$$(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)^2$$

олдуғуну исбат эдин.

4. 47 вә 1269 әдәдләри арасына ики орта мүтәнасиб әдәд дахил эдин. **Чаваб.** 141 вә 423.

3. Һәндәси силсиләнин сонлу сайда һәдләри чәминин формулу

Тутаг ки, ортаг вуруғу q олан

$$a_1, a_2, \ldots, a_n.$$

һәндәси силсиләси верилмишдир. Бу силсиләнин биринчи n һәддинин чәмини s_n илә ишарә эдәк:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_n. \qquad (8)$$

Һәндәси силсиләнии тә'рифинә көрә

$$a_2 = a_1 \cdot q, \qquad a_3 = a_2 \cdot q, \ldots, a_n = a_{n-1} \cdot q$$

олмалыдыр. Онда

$$s_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + \ldots + a_{n-1} \cdot q \qquad (9)$$

олар. Сонунчу бәрабәрликдән ортаг q вуруғу мө'тәризә харичинә чыхардаг:

$$s_n = a_1 + q(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}).$$

(8) бәрабәрлийиндән $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} = s_n - a_n$ бәрабәрлийини тапыб (9)-да еринә язсаг:

$$s_n = a_1 + q(s_n - a_n)$$

аларыг.

Бу ахырынчы бир дәрәчәли бир мәчһуллу тәнлийи s_n-ә көрә һәлл эдәк: $qs_n - s_n = qa_n - a_1$.

Бурада, әкәр $q \neq 1$ исә

$$s_n = \frac{a_n \cdot q - a_n}{q - 1} \qquad (10)$$

олар. $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ олдуғуну нәзәрә алсаг (10) бәрабәрлийи

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \qquad (11)$$

шәклиндә язылыр. $q < 1$ олдугда (10) формулу

$$s_n = \frac{a_1 - a_n \cdot q}{1 - q} \qquad (12)$$

шәклиндә язылыр.

Мисаллар. 1. 9750 әдәдини дөрд ерә элә айырын ки, әлдә эдилән әдәдләр һәндәси силсиләнин һәдләри олсун вә бу силсиләнин кәнар һәдләринин фәрги илә орта һәдләри фәргинин нисбәти $\frac{19}{6}$-а бәрабәр олсун.

Силсиләнин тапачағымыз һәдләрини a, b, c, d илә ишарә эдәк. Онда $a + b + c + d = 9750$ олмалыдыр вә я (11) формулуна көрә

$$s_4 = a\,\frac{1 - q^4}{1 - q} = a(1 + q + q^2 + q^3);$$

бурадан $a(1 + q + q^2 + q^3) = 9750$ олмалыдыр. Дикәр тәрәфдән шәртә көрә $\frac{a - d}{b - c} = \frac{19}{6}$ олмалыдыр вә я $\frac{a(1 - q^3)}{a(q - q^2)} = \frac{19}{6}$ олар. Сонунчу бәрабәрлийи садәләшдирсәк $\frac{1}{q}(1 + q + q^2) = \frac{19}{6}$ аларыг; бурада $6q^2 + 6q + 6 = 19q$ квадрат тәнлийи алынар. Һәмин тәнлийи һәлл эдәрәк $q = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{12} = \frac{13 \pm 5}{12}$ аларыг. Онда, бир тәрәфдән $q_1 = \frac{13 + 5}{12} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$, дикәр тәрәфдән исә $q_2 = \frac{13 - 5}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ олар.

q-нүн биринчи гиймәтини еринә язсаг:

$$a\left(1+\frac{3}{2}+\frac{9}{4}+\frac{27}{8}\right)=9750 \text{ вә я } \frac{65}{3}\cdot a=9750$$

онда

$$a=\frac{78000}{65}=1200 \text{ олар.}$$

Әләчә дә

$$b=a\cdot q=1200\frac{3}{2}=1800,$$

$$c=b\cdot q=1800\frac{3}{2}=2700,$$

$$d=cq=2700\frac{3}{2}=\frac{8100}{2}=4050$$

олдуғуну көрмәк чәтин дейилдир. Беләликлә, 1200, 1800, 2700, 4050 әдәдләри ахтардығымыз һәндәси силсиләнин һәдләри олар.

2. Бир балонда 1250 *л* 80 фаизли спирт вардыр. Бу балондан үч дәфә бәрабәр мигдарда мае көтүрүлмүш вә һәр дәфә һәмин мигдарда су әлавә эдилмишдир. Ахырда мә'лум олмушдур ки, 125 *л* тәмиз спирт галмышдыр. Һәр дәфә балондан нә гәдәр спирт көтүрүлмүшдүр?

Мәсәләни һәлл этмәк үчүн балонда илк дәфә нә гәдәр тәмиз спирт олдуғуну тә'йин эдәк. Ашкардыр ки, балонда 1250 *л* маеин 80 фаизи тәмиз спиртдир, йә'ни балонда $\frac{1250}{100}\cdot 80=1000$ *л* тәмиз спирт вардыр. Фәрз эдәк ки, 3 дәфәнин һәр бириндә балондан x *л* мае көтүрүлүр вә әвәзинә x *л* су әлавә эдилир.

Айдындыр ки, биринчи дәфә көтүрүлән x *л* маедә $1000\cdot\frac{x}{1250}$ гәдәр тәмиз спирт көтүрүлүр. Төкүлән су, балонда олан тәмиз спиртин мигдарыны дәйишдирмәдийиндән биринчи мүбадиләдән сонра балонда галан тәмиз спиртин мигдары

$$a_2=1000-1000\cdot\frac{x}{1250}=1000\left(1-\frac{x}{1250}\right)=1000\cdot\frac{1250-x}{1250} \text{ л}$$

олар.

Асанлыгла көрмәк олар ки, икинчи вә үчүнчү мүбадиләдән сонра балонда галан тәмиз спиртин мигдары, ортаг вуруғу $q=\frac{1250-x}{1250}$ олан һәндәси силсиләнин һәдләридир.

Демәли, биринчи һәдди $a_1=1000$, ортаг вуруғу $q=\frac{1250-x}{1250}$ вә

һәдләри сайы $n = 4$ олан һәндәси силсилә алырыг. Шәртә көрә

$$a_n = 1000 \cdot \left(\frac{1250 - x}{1250} \right)^3 = 125.$$

Бурадан

$$10 \cdot \frac{1250 - x}{1250} = 5$$

вә я

$$1250 - x = 625, \quad x = 1250 - 625 = 625$$

алынар.

Демәли, һәр дәфә балондан 625 *л* мае көтүрүлмүш вә әвәзинә 625 *л* су төкүлмүшдүр. Инди һәр дәфә балондан көтүрүлән тәмиз спиртин мигдарыны тапаг. Бурада

$$q = \frac{1250 - 625}{1250} = \frac{1}{2}$$

олар.

Балондан биринчи дәфә көтүрүлән тәмиз спиртин мигдары

$$1000 \cdot \frac{1}{2} = 500 \text{ л},$$

икинчи дәфә көтүрүлмүш тәмиз спиртин мигдары

$$500 \cdot \frac{1}{2} = 250 \text{ л},$$

үчүнчү дәфә көтүрүлмүш тәмиз спиртин мигдары исә

$$250 \cdot \frac{1}{2} = 125 \text{ л}$$

олар.

§ 5. РЕКУРРЕНТ АРДЫЧЫЛЛЫГЛАР

Рекуррент сөзү франсызча башланғыча гайытмаг демәкдир. Рекуррент ардычыллыг әвәзиндә бә'зән гайыдан ардычыллыг да ишләдилир. Рекуррент ардычыллыглар анлайышы әдәди вә һәндәси ардычыллыглар анлайышынын үмумиләшмәсидир. Бу ардычыллыглар анлайышы хүсуси һалда натурал әдәдләрин квадратлары, кублары вә и. а. кими ардычыллыглары да әһатә эдир. Тутаг ки,

$$u_1, u_2, \ldots, u_n \tag{1}$$

ардычыллығы вә k дәнә һәгиги $a_1, a_2, \ldots, a_k$ әдәдләри верилмишдир. Әкәр мүәййән k нөмрәсиндән башлаяраг сонра кәлән бүтүн нөмрәләр үчүн

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \ldots + a_k u_n \tag{2}$$
$$(n \geqslant k \geqslant 1)$$

бәрабәрликләри тә'мин олунарса, онда (1) ардычыллығына k

тәртибдән рекуррент ардычыллыг вә (2) мүнасибәтинә исә *к тәртибдән рекуррент тәнлик* дейилир.

(2) тәнлийиндән көрүндүйү кими (1) ардычыллығынын сонракы һәдләрини һесабламаг үчүн онун әввәлки һәдләринә гайытмаг лазым кәлир.

Рекуррент ардычыллыға аид бир нечә мисал көстәрәк.

1. **Һәндәси силсиләйә** аид бир мисал көтүрәк. Тутаг ки, (1) ардычыллығы, өртаг вуруғу q олан һәндәси силсиләдир. Тә'рифә көрә $u_{n+1} = qu_n$ олмалыдыр. Бу мисалда $к = 1$, $a_1 = q$ олдуғу айдындыр. Демәли, һәндәси силсилә ваһид тәртибли рекуррент ардычыллыгдыр.

2. **Әдәди силсиләйә** аид бир мисал көтүрәк. Тутаг ки, (1) ардычыллығы, фәрги d олан әдәди ардычыллыгдыр. Тә'рифә көрә $u_{n+1} = u_n + d$ олмалыдыр. Бу исә (2) тәнлийи шәклиндә язылмамышдыр, чүнки (2) мүнасибәтиндә сәрбәст һәдд йохдур. Лакин әдәди силсиләнин һәдләрини (2) шәклинә асанлыгла салмаг олар. Онун үчүн далбадал кәлән ики һәдди

$$u_{n+2} = u_{n+1} + d$$
$$u_{n+1} = u_n + d$$

тәрәф-тәрәфә чыхаг. Бу һалда аларыг:

$$u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n$$

вә я

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$$

олар. Бу исә $a_1 = 2$, $a_2 = -1$, $к = 2$ олдуғуну көстәрир. Демәли, әдәди силсилә ики тәртибли рекуррент ардычыллыгдыр.

3. **Тарихи мәсәлә.** (Фибоначчинин мәсәләси)[1]. Мә'лум олдуғуна көрә һәр бир чүт еткин довшандан айда бир чүт бала төрәйир. Белә ки, тәзә доғулан довшанлар бир ай әрзиндә тамам еткинләшир. Мәсәләдә сорушулур ки, бир чүт еткин довшандан бир ил мүддәтиндә нечә чүт еткин довшан төрәйир.

Һәмин мәсәләни рекуррент ардычыллыглар васитәсилә һәлл едәк. Ашкардыр ки, мәсәләнин шәртинә көрә илин әввәлиндә бир чүт еткин довшан вардыр, йә'ни $u_1 = 1$-дир. Бир айдан сонра даһа бир чүт довшан төрәйир. Амма еткин чүтләр енә дә әввәлдә олдуғу кими бир чүт олараг галыр. Демәли, $u_2 = 1$-дир. Ики айдан сонра довшан балалары еткинләшир вә еткин довшанларын үмуми сайы ики чүт, йә'ни $u_3 = 2$ олур. Үч айдан сонра исә еткин довшанларын сайы үч чүт олур. Мәсәләни һәлл етмәк үчүн риязи индуксия методундан истифадә етмәк лазым кәлир. Тутаг ки, $n-1$ айдан сонра еткин довшанларын сайы u_n, n айдан сонра исә u_{n+1}-дир. Бу мүддәт әрзиндә габагча олан u_n еткин чүтдән даһа u_n бала довшан

---

[1] Фибоначчи вә я Леонардо Пизаниски орта әсрләрин италян риязиййатчысыдыр. Бу мәсәләни тәгрибән 1204-чү илдә сөйләмишдир.

төрәдийи үчүн $n+1$ айдан сонра еткин чүтләрин үмуми сайы $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$ олар. Онда

$$u_5=u_4+u_3=3+2=5,$$
$$u_6=u_5+u_4=5+3=8,$$
$$u_7=u_6+u_5=8+5=13$$

алынар. Беләликлә, әввәлчә (u_1), бир айдан сонра (u_2), ики айдан сонра (u_3), үмумиййәтлә n айдан сонра (u_{n+1}) вә и. а. еткин довшанларын сайы

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13 \qquad (3)$$

ардычыллығы илә мүәййән эдилир. Бу ардычыллығын һәр сонра кәлән һәдди билаваситә ики әввәл кәлән һәддин чәминә бәрабәрдир. Һәмин гайда илә он ики айдан сонра 144 чүт еткин довшан төрәйәчәйини һесабламаг чәтин дейилдир.

(3) ардычыллығына Фибоначчи ардычыллығы, онун әдәдләринә исә Фибоначчи әдәдләри дейилир. Үмумиййәтлә, Фибоначчи ардычыллығында u_1, u_2-йә башланғыч гиймәтләр дейилир. Бу гиймәтләр васитәсилә ардычыллығын галан бүтүн һәдләри һесабланыр. Һәмин гиймәтләри дәйишдирмәклә $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$ ганунилийәтинә риайәт эдиб сайсыз-һесабсыз Фибоначчи ардычыллыглары вә әдәдләри әлдә эдә биләрик.

4. Даһа бир мисал көстәрәк, тутаг ки, натурал әдәдләрин квадратлары ардычыллығы верилмишдир:

$$1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ .\ .\ .\ ,\ n^2,\ .\ .\ .$$

Айдындыр ки, бу ардычыллығын үмуми һәдди $u_n=n^2$ олар. Әләчә дә $u_{n+1}=(n+1)^2=n^2+2n+1=u_n+2n+1$ олар. Бурадан билаваситә натурал әдәдләрин квадратларындан дүзәлмиш ардычыллығын рекуррент ардычыллыг олдуғуну һөкм этмәк олмур, лакин $u_{n+1}=u_n+2n+1$ ифадәсиндә n-ин үзәринә бир ваһид кәлсәк $u_{n+2}=u_{n+1}+2(n+1)+1=u_{n+1}+2n+3$ олдуғуну көрәрик. Алынан ики бәрабәрлийи тәрәф-тәрәфә чыхсаг, $u_{n+2}-u_{n+1}=u_{n+1}-u_n+2$ олар. Бурадан $u_{n+2}=2u_{n+1}-u_n+2$ алынар. Бу сонунчу ифадәдә n-ин үзәринә даһа бир ваһид кәлсәк $u_{n+3}=2u_{n+2}-u_{n-1}-u_{n+1}+2$ мүнасибәтини әлдә эдәрик. Инди ахырынчы ики бәрабәрлийи тәрәф-тәрәфә чыхаг:

$$u_{n+3}-u_{n+2}=2u_{n+2}-3u_{n+1}+u_n$$

вә бурадан

$$u_{n+3}=3u_{n+2}-3u_{n+1}+u_n$$

рекуррент мүнасибәти әлдә эдилир. Бу исә натурал әдәдләрин квадратларындан дүзәлмиш ардычыллығын үч тәртибли рекуррент ардычыллығы олдуғуну көстәрир. Әкәр көстәрилән гайда илә натурал әдәдләрин 1^3, 2^3, 3^3, 4^3, . . . , n^3, . . . кублары ардычыллығыны тәдгиг этмиш олсаг $u_n=n^3$ олдуғуну нәзәрә алыб

$$u_{n+4}=4u_{n+3}-6u_{n+2}+4u_{n+1}-u_n$$

рекуррент мүнасибәтини әлдә едә биләрик. Демәли, натурал әдәдләрин кубларындан дүзәлдилмиш ардычыллыг дөрдүнчү тәртибли рекуррент ардычыллыгдыр.

Нәһайәт гейд едәк ки, бүтүн дөври ардычыллыглар рекуррентдир. О чүмләдән сонсуз дөври онлуг кәсрләрин онлуг ишарәләри рекуррент ардычыллыг тәшкил едир.

Рекуррент ардычыллығын үмуми хассәләриндән бирини дә гейд едәк:

$$u_{n+к} = a_1 u_{n+к-1} + \ldots + a_n u_n$$

рекуррент тәнлийини өдәйән һәр бир рекуррент ардычыллыг мүәййән $P(x)$ чохһәдлисинин

$$Q(x) = 1 - a_1 x + \ldots - a_к x^к$$

чохһәдлисинә бөлүнмәсиндән алынан коэфисиентләрдән дүзәлмиш ардычыллыгла ейни олур. Һәмин чохһәдли

$$P(x) = u_1 + (u_2 - a_1 u_1) + \ldots + (u_{к+m-1} - a_1 u_{к+m-2} - \\ - \ldots - a_к u_{m-1}) x^{к+m-2}$$

шәклиндәдир. Бу тәклифин исбаты охучулара тапшырылыр.

Инди рекуррент ардычыллыгларын башга бир хассәси үзәриндә даянаг. Тутаг ки, (2) шәрти дахилиндә (1) ардычыллығы $к$ тәртибли рекуррент ардычыллығы верилмишдир. Исбат едәк ки, $s_1 = u_1$, $s_2 = u_2$, . . . , $s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, ардычыллыг $к$ тәртибли (1) рекуррент ардычыллығын һәдләринин чәминдән дүзәлмиш рекуррент ардычыллыгдыр вә онун һәдләри

$$s_{n+к+1} = (1 + a_1) s_{n+к} + (a_2 - a_1) s_{n+к-1} + \ldots + a_к s_n \quad (4)$$

рекуррент тәнликләрини өдәйир.

Доғрудан да,

$$u_1 = s_1, \quad u_2 = s_2 - u_1 = s_2 - s_1, \ldots$$

$$u_n = s_n - (u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}) = s_n - s_{n-1}$$

олур. $s_0 = 0$ фәрз едиб $u_1 = s_1 - s_0$ шәклиндә язсаг (2) тәнлийиндә $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ һәдләринин онларын $s_0, s_1, \ldots s_n, \ldots$ чәмләри васитәсилә олан ифадәләрини еринә язаг:

$$s_{n+к} - s_{n+к-1} = a_1(s_{n+к-1} - s_{n+к-2}) + a_2(s_{n+к-2} - s_{n+к-2}) + \\ + \ldots + a_к(s_n - s_{n-1}),$$

вә я

$$s_{n+к} = (1 + a_1) s_{n+к-1} + (a_2 - a_1) s_{n+к-2} + \ldots + (a_к - \\ - a_{к-1}) s_n - a_к s_{n-1}$$

олар. Бу ифадәдә n-и $n+1$ илә әвәз етсәк (4) тәнлийини әлдә едәрик. Ардычыллыгларын һәдләри чәми үчүн дүзәлән бу рекуррент тәнликләр онларын хүсуси чәмләрини тапмаға имкан верир. Мәсәлән, һәндәси силсилә үчүн $u_n = a_1 q^{n-1}$, $u_{n+1} = q u_n$ вә $s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = a + aq + \ldots + aq^{n-1}$ олдуғундан $s_{n+2} = (1 + q) s_{n+1} - q s_n$ олар. Натурал әдәдләрин

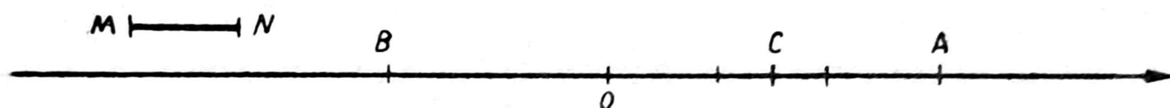
квадратларындан дүзәлмиш ардычыллыг үчүн исә хүсуси чәмләрин рекуррент мүнасибәти

$$s_{n+4}=4s_{n+3}-6s_{n+2}+4s_{n+1}-s_n$$

ифадәсилә тә'йин эдилир.

§ 6. АРДЫЧЫЛЛЫГЛАРЫН ҺӘНДӘСИ ТӘСВИРИ

Инди ардычыллыгларын бә'зи дахили ганунларыны өйрәнәк. Бу ганунларын бә'зиләри үмуми маһиййәт дашыйыр, бә'зиләри исә бу вә я дикәр конкрет ардычыллыгларын мәһз өзүнә мәхсус олур. Ери кәлдикчә белә ганунлары гейд эдәчәйик. Һәр шейдән әввәл ардычыллығын һәдләринин нөмрәләри артмагла о һәдләрин дәйишмәси ганунларыны, бу дәйишмәнин сүр'әтини тапмаг кими мәсәләләрин һәлли илә мәшғул олачағыг. Она көрә дә әввәлчә ардычыллыглары һәндәси тәсвир эдәк. Бу мәгсәдлә әдәд оху көтүрәк (10-чу шәкил).



10-чу шәкил

Әдәд оху үзәриндә верилмиш әдәдләрә уйғун нөгтә тапмаг үчүн әввәлчә өлчү ваһиди гәбул этмәлийик.

Мәсәлән, MN парчасыны ваһид парча гәбул эдәк (10-чу шәкил). Әкәр дүз хәтт үзәриндә $+3$ әдәдинә уйғун нөгтәни тапмаг лазым кәләрсә, онда O нөгтәсиндән башлаяраг сağа доғру гәбул этдийимиз ваһид парчадан 3 дәфә бөйүк бир парча айырмалыйыг. Бу парчанын сағ учуну A илә ишарә эдәк. Онда OA парчасынын узунлуғу 3 ваһид олар. Бу мә'нада A нөгтәси $+3$ әдәдинә уйғун олур. Әкәр дүз хәтт үзәриндә -2 әдәдилә уйғун нөгтә тапмаг лазым кәләрсә, O нөгтәсиндән бшлаяраг сол тәрәфдә бир учу O нөгтәсиндә олан вә верилмиш ваһид парчадан ики дәфә бөйүк бир парча көтүрмәлийик (һәмин парчанын уч нөгтәсини B илә ишарә эдәк).

Верилмиш әдәд иррасионал олдугда мә'лум гайдадан истифадә эдиб ону әдәд оху үзәриндә гура биләрик.

Бу гайда илә габагчадан верилән һәр бир әдәдә дүз хәтт үзәриндә уйғун олан бир нөгтә тапмаг олар.

Тәрсинә, дүз хәтт үзәриндә бир учу O нөгтәсиндә вә дикәр учу C нөгтәсиндә олан һәр һансы парча көтүрмүш олсаг, бу парчада ваһид парча нечә дәфә ерләширсә алынан әдәд парчанын дикәр уч нөгтәсинә гаршы гоюлмуш олур.

Мәсәлән, шәкилдә көтүрүлән oc парчасында ваһид парча 1,5 дәфә ерләшир. Она көрә дә 1,5 әдәдини c нөгтәсинә гаршы гоюруг.

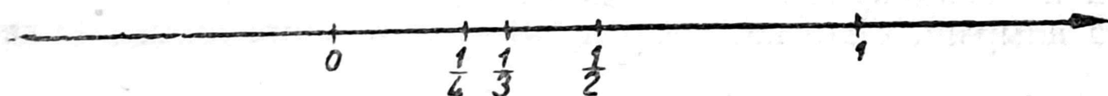
Демәли һәр бир әдәдлә уйғун олан дүз хәтт үзәриндә бир нөгтә вә тәрсинә, дүз хәтт үзәриндә һәр нөгтә илә уйғун олан бир әдәд вардыр. Буну нәзәрә алараг верилмиш һәр бир

әдәдләр ардычыллығыны әдәд охуна көчүрмәк олар. Мәсәлән,

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots\ ,\frac{1}{n},\ \ldots \qquad (1)$$

ардычыллығыны әдәд охуна көчүрмәк үчүн әввәлчә ардычыллығын биринчи һәдди олан $a_1 = 1$ әдәдилә уйғун нөгтәни тапаг вә ону 1 илә ишарә едәк. Сонра ардычыллығын икинчи һәдди олан $a_2 = \frac{1}{2}$ әдәд илә уйғун нөгтәни әдәд оху үзәриндә тапаг вә ону $\frac{1}{2}$ илә ишарә едәк вә и. а. Бу гайда илә ардычыллығын ихтияри $a_n = \frac{1}{n}$ һәддилә уйғун олан нөгтәни әдәд оху үзәриндә тапаг вә ону $\frac{1}{n}$ илә ишарә едәк (11-чи шәкил).

Шәкилдән көрүндүйү кими ардычыллығын һәдләринин дурдуглары ерләринин нөмрәләри артдыгча ардычыллығын һәдләри



11-чи шәкил

o нөгтәсинә доғру сыхлашыр. O нөгтәсиндән сағa вә сола узунлуғу ε олан бир парча айырмыш олсаг, көтүрдүйүмүз ардычыллығын бүтүн һәдләри кеч вә я тез мүәййән һәддән башлаяраг һәмин парчада ерләшәчәкдир.

Мәсәлән, $\varepsilon=2$ олса (1) ардычыллығынын бүтүн һәдләри [0,2] парчасына дахил олар. $\varepsilon = \frac{1}{3}$ олса ардычыллығын биринчи, икинчи һәддиндән башга (бу һәдләр ε парчасындан кәнарда галар) бүтүн һәдләри узунлуғу $\varepsilon = \frac{1}{3}$ олан парчадан (бир учу o олан) ерләшәчәкдир. $\varepsilon = \frac{1}{10}$ көтүрүлсә $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{12}$, ... һәдләр ε парчасында, ардычыллығын биринчи 10 һәдди исә һәмин парчадан кәнарда ерләшәчәкдир. Бу һалларын һамысында (1) ардычыллығынын мүәййән һәдләриндән башлаяраг сонра кәлән бүтүн һәдләри габагчадан верилмиш узунлуғу ε олан парчада ерләшир.

Беләликлә, бир учу o нөгтәсиндә олан верилмиш һәр парчанын ичәрисиндә (1) ардычыллығыны сонсуз сайда, харичиндә исә сонлу сайда һәдләри ерләшир.

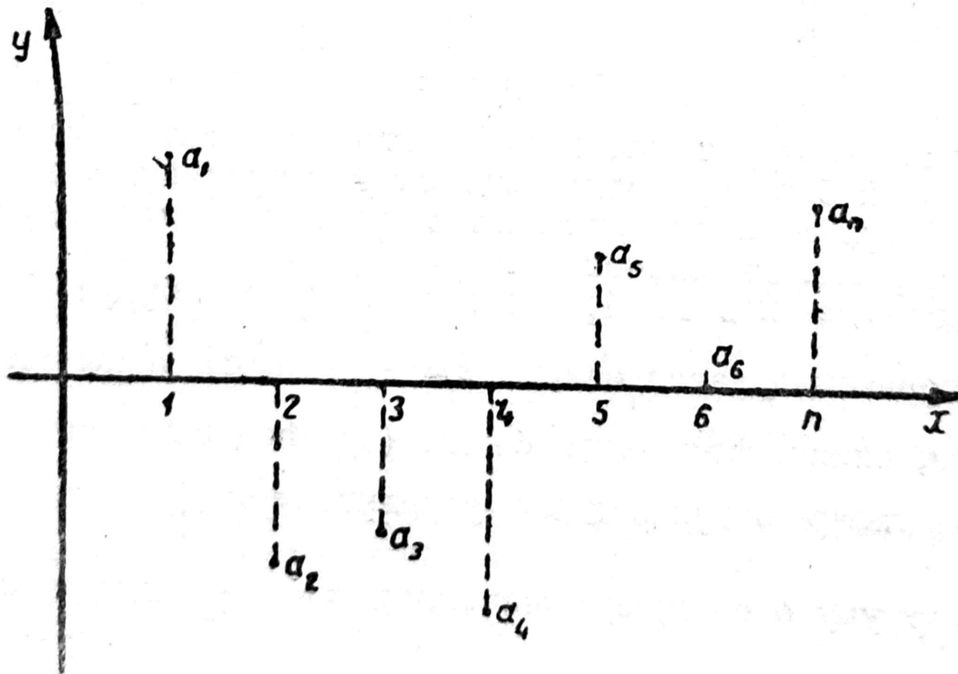
Демәли, (1) ардычыллығынын сонсуз сайда һәдләри, бою истәнилән гәдәр кичик көтүрүлә билән парчанын дахилиндә ерләшир; башга сөзлә ардычыллығын һәдләринин нөмрәси артдыгча ардычыллығын һәдләри сыфра кет-кедә даһа яхын олур. Бу һәгигәт үмумиййәтлә белә сөйләнилир: габагчадан верилмиш һәр бир мүсбәт ε әдәдинә көрә элә $N>0$ әдәди вардыр ки, $n>N$ олан бүтүн n-ләр үчүн $|a_n|<\varepsilon$ оларса,

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots \qquad (2$$

ардычыллығы сыфра йығылыр вә белә ишарә эдилир:

$$\lim_{n\to\infty} a_n=0;$$

бурада $n\to\infty$ ишарәси n-нин һүдудсуз артдығыны көстәрир. Бә'зән ардычыллығын һәдләринин дәйишмәсини әдәд оху үзәриндә дейил, мүстәви үзәриндә даһа әяни көрмәк олур. Бир мүстәвидә башланғыч O нөгтәсиндә кәсишән һоризонтал вә вертикал охлар (абсис вә ординат охлары) көтүрәк. Һоризонтал ох үзәриндә бүтүн натурал әдәдләри гейд эдәк (2) ардычыллығынын a_1 биринчи һәддини, һоризонтал ох үзәриндә 1 нөгтәсиндә галдырылан перпендикуляр үзәриндә гейд эдәк (йә'ни һәмин перпендикуляр үзәриндә узунлуғу a_1-ә бәрабәр олан парча айыраг), белә ки, әкәр $a_1>0$ оларса, һоризонтал охдан

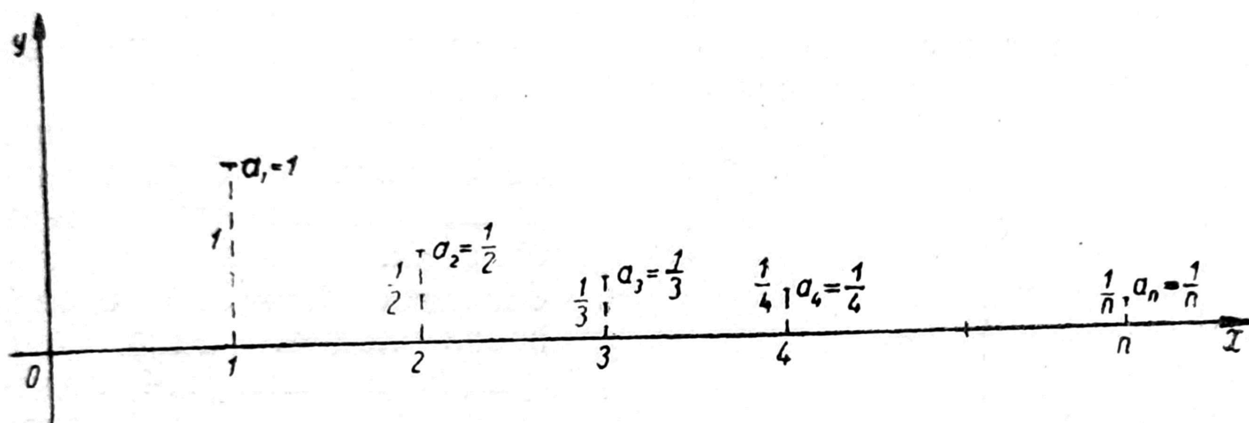


12-чи шәкил

юхарыда, $a_1<0$ оланда һәмин перпендикуляр үзәриндә a_1 нөгтәсини һоризонтал охдан ашағыда гейд эдәк, $a_1=0$ оланда гурачағымыз нөгтә һоризонтал хәтт үзәриндәки 1 нөгтәси үзәринә дүшәчәкдир. Бу иши һоризонтал охун 2, 3, ... нөгтәләриндән тәкрар этмәклә (2) ардычыллығынын һәдләрини мүстәвийә көчүрмәк олар (12-чи шәкил). Бу гайда илә дә (1) ардычыл-

чыллығынын һәдләрини мүстәви үзәринә көчүрсәк 13-чү шәкилдә тәсвир эдилән a_1, a_2, ... нөгтәләрини әлдә эдәрик.

13-чү шәкилдән көрүндүйү кими n-артдыгча 1, 2, 3, ..., n, ... нөгтәләриндә чәкилән уйғун перпендикулярларын бойлары



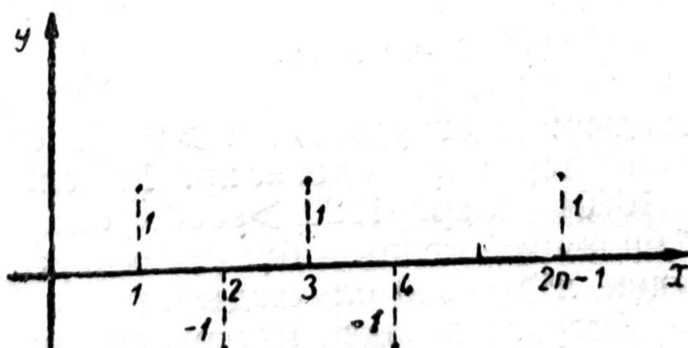
13-чү шәкил

азалыр. $n\to\infty$ шәтиндә исә һәмин перпендикуляр парчаларын бойлары сыфра яхынлашыр.

Инди

$$1, -1, +1, -\ldots, (-1)^{n-1} \qquad (3)$$

ардычыллығыны көтүрәк. Бу ардычыллығын һәдләрини мүстәви үзәринә көчүрсәк алынан нөгтәләрин абсис (һоризонтал) охундан каһ юхары, каһ да ашағы дүшдүйүнү көрәрик (14-чү шәкил), йә'ни (3) ардычыллығынын һәдләри абсис оху әтрафында рәгс эдиб мүәййән бир әдәдә яхынлашмаячагдыр.



14-чү шәкил

Башга бир ардычыллыг көтүрәк:

$$1, 2^2, 3^2, \ldots, n^2, \ldots \qquad (4)$$

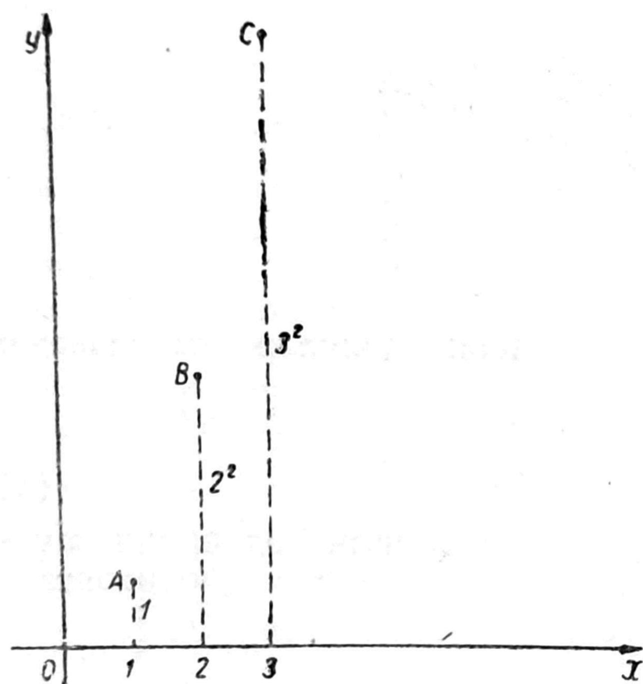
Бу ардычыллығы һәм биринчи вә һәм дә икинчи үсулла һәндәси тәсвир эдәк.

15-чи шәкил

Верилмиш ардычыллығы әдәд охуна көчүрмүш олсаг (биринчи үсул) бу әдәдләрә уйғун нөгтәләр башланғычдан (o—нөгтәсиндән) олан мәсафәләрин квадраты сүр'әти илә башланғыч нөгтәсиндән узаглашачагдыр (15-чи шәкил).

Габагчадан нә бөјүклүкдә бир әдәд олурса олсун (4) ардычыллығынын һәдләри мүәјјән һәддән башлајараг һәмин әдәддән бөјүк олачаг вә бөјүклүкдә давам едәчәкдир.

Әкәр һәмин ардычыллығы икинчи үсулла һәндәси тәсвир этсәк, јә'ни (4) ардычыллығынын һәдләрини мүстәви үзәринә көчүрсәк, һәдләрин нөмрәси артдыгча ардычыллығын һәдләринә уйғун олан нөгтәләр башланғыч нөгтәдән узаглашачаг вә узаглашмагда давам едәчәкдир (16-чы шәкил).



16-чы шәкил

Шәкил үзрә верилмиш белә тәсвири бәрабәрсизликләр дилинә дә кечирә биләрик. Фәрз едәк ки, габагчадан $M=10000$ әдәди верилмишдир. Белә бир суал ортаја чыхыр: (4) ардычыллығынын $M=10000$ әдәдини ашан һәдләри вармы, јохса (4) ардычыллығынын бүтүн һәдләри верилмиш M әдәдиндән кичикдир? Бу суала чаваб вермәк үчүн (4) ардычыллығынын үмуми һәддини, јә'ни $a_n=n^2$ һәддини 10000 әдәди илә мүгајисә етмәлијик. Ардычыллығы $a_n>M$ бәрабәрсизлијини өдәјән һәдләри вармы? Көстәрәк ки, (4) ардычыллығынын сонсуз сайда белә һәдләри вардыр. Доғруданда, $n^2>10000$ бәрабәрсизлији $n>100$ олан нөмрәләр үчүн өдәнилир. Мәсәлән, $n=101$ олса, $a_{101}=(101)^2=$ $=10201$ олар. $10201>10000$ олдуғундан $N=101$ нөмрәсиндән башлајараг кәлән бүтүн нөмрәләр үчүн, јә'ни $n>N=101$ үчүн $n^2>10000$ олачагдыр.

Әкәр габагчадан көтүрүлән әдәд $M=10^6$ олса, онда јенә дә елә бир натурал $N>0$ тапмаг олар ки, $n>N$ оланда, $n^2>10^6$ олар. Ајдындыр ки, $n>10^3$ оланда, $n^2>10^6$ олар. Она көрә дә $N=1001$ гәбул етсәк, нөмрәси 1001-дән бөјүк олан бүтүн һәдләр 10^6-дан бөјүк олачагдыр. Мәсәлән, $a_{1002}=1002^2=1004004>$ 1000000 һәдди вә ардычыллығын сонра кәлән бүтүн һәдләри 10^6-дән бөјүк олачагдыр. Беләликлә, габагчадан көтүрүлән $M>0$ әдәди нә гәдәр бөјүк әдәд олса белә, һәмишә елә натурал $N>0$ әдәди тапмаг мүмкүндүр ки, $n>N$ олан һәр бир n үчүн $a_n>M$ олачагдыр. Башга сөзлә n-ин артмасы илә ардычыллығын һәдләри һүдудсуз олараг артыр. Белә ардычыллыглара *гејри-мәһдуд* вә ја *дағылан ардычыллыг* дејилир. Әксинә (1), (3) ардычыллыглары мәһдуд ардычыллыглардыр. Бу

ардычыллыгларын һәр икисинин бүтүн һәдләри 1-и ашмыр. Бу ардычыллыгларды (1) ардычыллығы йығылан, (3) ардычыллығы исә дағылан ардычыллыгдыр.

Биз бә'зи хүсуси ардычыллыгларын йығылыб-дағылмаларыны бир гәдәр сәтһи, интутив йол илә тә'йин этдик. Инди исә һаггында данышдығымыз риязи анлайышларын чидди тә'рифләрини верәк.

§ 7. ЛИМИТ ҺАГГЫНДА

Кәмиййәтләрин дәйишмә просесләрини нәзәрдән кечирдикдә көрүрүк ки, онлардан бә'зиләринин дәйишмә просеси арасы кәсилмәйән—фасиләсиз, бә'зиләрининки исә фасиләли—сычрайышлыдыр. Мәсәлән, бошлугда сәрбәст дүшән чисмин ерә энмә просеси фасиләсиз—кәсилмәз просесдир вә бу просес замачы чисмин кетдийи йол кәсилмәз дәйишән кәмиййәтдир. Бурада чисмин ердән олан һүндүрлүйү арасы кәсилмәдән дәйишәрәк сыфра яхынлашыр. Бу кәмиййәти x илә ишарә эдәк. Айдындыр ки, дәйишән x кәмиййәти сычрайышларла дейил, арасы кәсилмәдән сыфра яхынлашачагдыр.

Биз, эйни заманда, гиймәтләри әдәдләр ардычыллығы тәшкил эдән дәйишән кәмиййәтләрдән дә юхарыда данышдыг вә белә дәйишән кәмиййәти x_n шәклиндә язмағы шәртләшдик. Бурада n-ә сәрбәст дәйишән (аргумент), x_n-ә исә асылы олараг дәйишән (функсия) кими баха биләрик; йә'ни гиймәтләри

$$x_1,\ x_2\ .\ .\ .\ .\ ,x_n\ .\ .\ .\ .\ . \qquad (1)$$

ардычыллығыны тәшкил эдән кәмиййәтә, аргументи n олан функсия кими дә баха биләрик. Бу функсия $n=1, 2, 3$ . . . вә и. а. натурал гиймәтләрлә тә'йин эдилмишдир, йә'ни n-ин һәр бир натурал гиймәтләриндә x_n-ин мүәййән бир гиймәти вардыр. Она көрә дә бурадан натурал әдәдләр чохлуғуна x_n-ин тә'йин олдуғу чохлуг дейилир.

Натурал әдәдләр чохлуғунда тә'йин эдилән функсиялара *аргументи там гиймәтли функсиялар* дейилир вә $f(n)$ илә ишарә эдилир. Бурада f символу n-ин үзәриндә апарылачаг бүтүн әмәлләри көстәрир. Мәсәлән $f(n)=n^2$ там аргументли функсиядыр. Бурада f символу n-и квадрата йүксәлтмә әмәлини әвәз эдир.

Лакин аргументи ялныз натурал гиймәтләр дейил, кәсилмәз гиймәтләр алан функсиялар да аз дейилдир. Мәсәлән, $f(t)=\frac{gt^2}{2}$ функсиясынын гиймәтләри васитәсилә сәрбәст дүшән чисмин кетдийи йолун узунлуғуну һесаблайырлар. Бурада g һәмин мәһәлдә сәрбәст дүшмә тә'чили, t исә дүшмә заманы олуб, арасы кәсилмәдән дәйишир.

Демәли, истәр аргументи там гиймәтли, истәрсә дә кәсилмәз гиймәтли функсиялар үмумиййәтлә, дәйишән кәмиййәтин

элә хүсуси һалыдыр ки, бурада бир дәйишән кәмиййәт өз дәйишмә просесиндә башга дәйишән кәмиййәтдән асылы олур.

Нәзәрдән кечирдийимиз мисалда заман сәрбәст дәйишәндир, кедилән йол исә замандан асылы олараг дәйишир.

Аргументи x илә, функсияны $y=f(x)$ илә ишарә эдәк. Функсияя һәгиги гиймәтләр верән аргументин гиймәтләри чохлуғуна *функсиянын варлыг областы* дейилир.

Бурада үмумиййәтлә, f символу $f(x)$ кәмиййәтинин дәйишмә ганунуну, дәйишмә просесинин кедишини, x исә просесин һалларыны мүәййән эдир.

Инди дәйишән кәмиййәтин лимитинин тә'рифини верәк.

Тә'риф. Әкәр дәйишән x кәмиййәти илә сабит a әдәди арасындакы фәргин $|x-a|$ мүтләг гиймәти, дәйишмә просесинин мүәййән һалындан башлаяраг сонра кәлән бүтүн һалларда, габагчадан верилән ихтияри мүсбәт әдәддән кичик оларса вә кичилмәйиндә давам эдәрсә, онда белә дәйишән x кәмиййәтинин лимити сабит a әдәдидир вә я x дәйишән кәмиййәти a әдәдинә яхынлашыр. Буну

$$x \to a \quad \text{вә я} \quad \lim x = a$$

шәклиндә ишарә эдирләр.

Дәйишән кәмиййәтин лимитинә вердийимиз тә'рифи бир гәдәр изаһ эдәк. Тә'рифдә дәйишән кәмиййәтләрин сабит әдәддән олан фәргинин мүтләг гиймәти габагчадан верилән ихтияри мүсбәт әдәдлә мүгайисә эдилир. Бу мүгайисәнин ики мүһүм чәһәти нәзәрә алынмалыдыр. Биринчи чәһәт, дәйишән кәмиййәтин сабит әдәдлә мүгайисәсиндә габагчадан верилән мүсбәт әдәдин там ихтияри олмасыдыр. Икинчи чәһәт исә кәмиййәтин дәйишмә просесинин элә бир һалынын мөвчуд олмасыдыр ки, бу һалдан сонра кәмиййәтин алдығы гиймәтләрлә сабит әдәд арасындакы фәрг мүтләг гиймәтчә габагчадан верилән һәр бир мүсбәт әдәддән кичик олур. Һәр бир дәйишән кәмиййәтин дәйишмә просесинин өзүнә мәхсус һаллары вардыр. Мәсәлән, x кәмиййәти замандан асылы олараг дәйишдикдә, $|x-a|$ фәрги мүәййән замандан башлаяраг кәләчәк заманларда габагчадан верилән ихтияри мүсбәт әдәддән кичик олур. Бурада дәйишмә просеси заманла әлагәдардыр. Кәмиййәтин алдығы гиймәтләрдән ардычыллыг дүзәлтмәк мүмкүндүрсә, просесин юхарыда гейд этдийимиз мүәййән һалы әвәзиндә ардычыллығын һәдләринин мүәййән нөмрәси сечилмәлидир. Она көрә дә дәйишән кәмиййәтин лимитинә верилән тә'риф ардычыллыг үчүн ашағыдакы кими олмалыдыр.

Тә'риф. Әкәр габагчадан верилән һәр бир мүсбәт ε әдәдинә көрә элә бир натурал N әдәди вардыса ки, $n>N$ бәрабәрсизлийини өдәйән бүтүн n-ләр үчүн (1) ардычыллығынын һәдләри илә сабит a әдәдинин фәргләри мүтләг гиймәтчә ε әдәдиндән кичик оларса, йә'ни $n>N$ олдугда $|x_n-a|<\varepsilon$ оларса,

сабит a әдәдинә *(1) ардычыллығынын лимити* дейилир вә

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

шәклиндә язылыр. Сонлу лимити олан һәр бир ардычыллыға *йығылан ардычыллыг* дейилир. Бу тә'рифин әсл маһиййәтини билмәк үчүн онун ашағыдакы әсас чәһәтләринә хүсуси фикир верилмәлидир:

1) габагчадан верилән мүсбәт ε әдәди ихтияридир. Бу чәһәт ардычыллығын кифайәт гәдәр бөйүк нөмрәли һәдләринин сабит a әдәдиндән олан фәргләринин мүтләг гиймәтчә һәр бир мүсбәт әдәддән кичик ола билмәсини көстәрир.

2) верилмиш $\varepsilon>0$ әдәдинә көрә натурал N әдәди сечилә биләр. Бу чәһәт натурал N әдәдинин ε-дан асылылығыны көстәрир. Айры-айры ардычыллыглар үчүн бу асылылығы араш-дырмыш олсаг, үмумиййәтлә көрәрик ки, $\varepsilon>0$ әдәди кичилдикчә натурал N әдәди артыр, йә'ни x_n илә a әдәдләри арасындакы фәргин мүтләг гиймәтини кифайәт гәдәр кичик ε-дән кичик этмәк үчүн кифайәт гәдәр бөйүк нөмрәли һәдләрин көтүрүлмәси лазым кәлир. Биз N-ин ε-дан асылы олараг сечилмәсини юхарыдакы мисалларда гисмән көрдүк.

3) тә'рифдә мә'лум a әдәдинин (1) ардычыллығынын лимити олдуғу көстәрилир. Верилмиш ардычыллығын лимитини тапмаг гайдасы исә көстәрилмир.

Дәйишән кәмиййәтин лимитинә верилән тә'рифи кәсилмәз аргументли функсия һаггында демәкдән өтрү әввәлчә аргументин дәйишәрәк мүәййән сабит a әдәдинә яхынлашдығыны (бу әввәлчәдән мә'лум олмалыдыр), сонра исә x-и a-я яхынлашдырдыгда $f(x)$-ин мүәййән бир b әдәдинә яхынлашыб-яхынлашмадығыны билмәлийик.

Тә'риф. Әкәр габагчадан верилән һәр бир мүсбәт ε әдәдинә көрә, дикәр бир мүсбәт δ әдәди тапмаг мүмкүндүрсә вә $|x-a|<\delta$ бәрабәрсизлийини өдәйән бүтүн x-ләр үчүн

$$|f(x)-b|<\varepsilon$$

оларса, онда x дәйишәрәк a-я яхынлашдыгда ($x\neq a$) b әдәдинә $f(x)$ функсиясынын лимити дейилир вә белә ишарә эдилир:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b.$$

Гейд этмәк лазымдыр ки, верилмиш $f(x)$ функсиясына көрә δ әдәди, габагчадан верилән ε әдәдинә көрә сечилир. Енә дә ε-ун ихтияри олмасы x әдәди a-я яхынлашанда $f(x)$ илә сабит b әдәди арасындакы фәргин мүтләг гиймәтини истәнилән гәдәр кичик эдилә билмә имканыны мүәййән эдир.

Юхарыдакы тә'риф $x\to\infty$-да белә дейилир, әкәр габагчадан верилән һәр бир мүсбәт ε әдәдинә көрә x-ин элә x_0 гиймәти тапыла биләрсә ки,

$$|f(x_0)-b|<\varepsilon$$

бәрабәрсизлийи x_0-дан башлаяраг $f(x)$-ин тә'йин областына дахил олуб, сонра кәлән бүтүн x-ләр үчүн өдәниләрсә, онда x сонсузлуға яхынлашдыгда b әдәдинә $f(x)$ функциясынын лимити дейилир вә

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b$$

шәклиндә ишарә эдилир.

Лимитин тапылмасында да юхарыдакы тә'рифләрин ролу аз дейилдир. Чох вахт, верилмиш кәмиййәтин лимитинин муәййән әдәдә бәрабәр олдуғу сезилир, сонра исә кәмиййәтин лимитинин һәмин әдәдә һәгигәтән бәрабәр олдуғу тә'риф васитәси илә йохланылыр.

Биз бу чәһәтләри айры-айры ардычыллығын лимитинин тапылмасында бир даһа нүмайиш этдирәчәйик.

Мисаллар. 1. Тутаг ки,

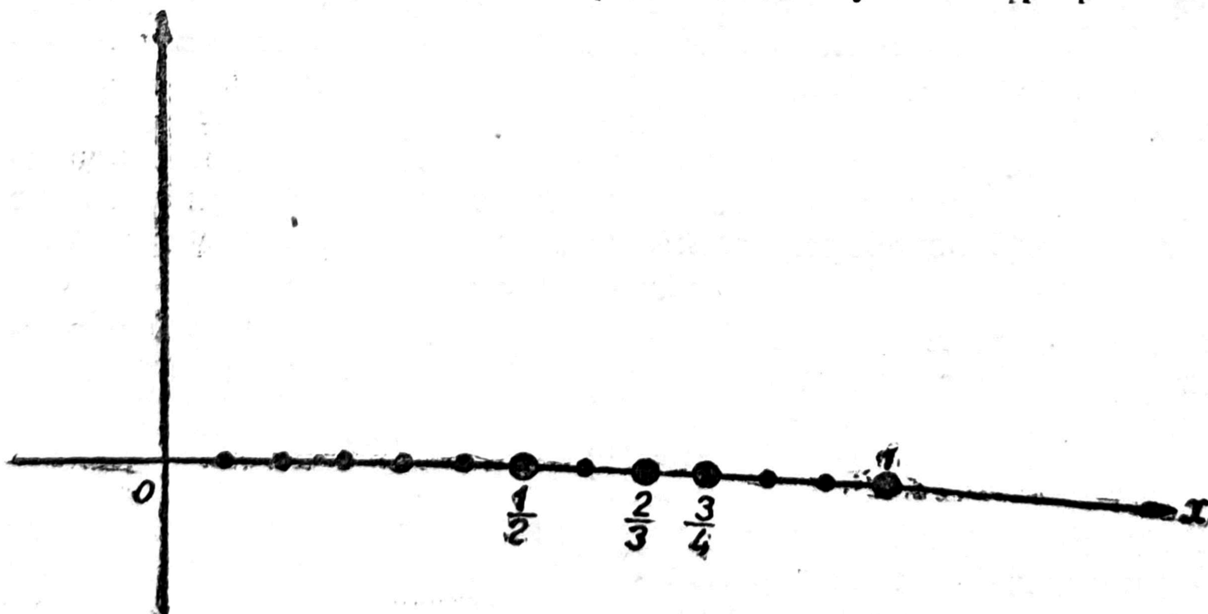
$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots \quad (2)$$

ардычыллығы верилмишдир. Бу ардычыллығын үмуми һәдди

$$x_n = \frac{n-1}{n}$$

олачағы айдындыр. Исбат эдәк ки, (2) ардычыллығынын лимити 1-дир. Бунун үчүн габагчадан верилән ихтияри $\varepsilon > 0$ әдәди көтүрәк. Көстәрәк ки, верилмиш бу $\varepsilon > 0$ әдәдинә көрә элә $N > 0$ әдәди вардыр ки, $n > N$ оланда $|x_n - 1| < \varepsilon$ олар.

(2) ардычыллығынын һәдләрини әдәд охуна көчүрмүш ол-



17-чи шәкил

саг, көрәрик ки, бу ардычыллығын һәдләри n-ин артмасы илә 1 әдәдинә сыхлашачагдыр (17-чи шәкил). Ихтияри натурал n әдәдинә көрә $\frac{n-1}{n} < 1$ олмасы айдындыр.

(2) ардычыллығынын лимитинин 1 олдуғуна һәндәси тәсвир васитәсилә һөкүм этмәк олмаса да, дуя билирик. Лимитин 1-ә бәрабәр олдуғуну гәт'и мүәййән этмәк үчүн 1-ин һәр бир кичик әтрафында ардычыллығын мүәййән нөмрәдән башлаяраг, бөйүк нөмрәли бүтүн һәдләрин ерләшдирилдийини көстәрмәлийик. Она көрә дә

$$\left|\frac{n-1}{n}-1\right|<\varepsilon$$

олдуғуну көстәрәк.
Лакин:

$$\left|\frac{n-1}{n}-1\right|=\left|\frac{n-1-n}{n}\right|=\left|-\frac{1}{n}\right|=\frac{1}{n}.$$

Демәли,

$$\frac{1}{n}<\varepsilon$$

олмалыдыр. Бу бәрабәсизлийи өдәйән натурал n әдәдләринин варлығыны көстәрәк. Айдындыр ки, бурада n-ин вә ε-ин мүсбәт олдуғуну нәзәрә алараг юхарыдакы бәрабәрсизлийи

$$n>\frac{1}{\varepsilon}$$

шәклиндә яза биләрик.

Белә олдугда N әвәзиндә $\frac{1}{\varepsilon}$-дан бөйүк натурал әдәди вә я $\frac{1}{\varepsilon}$ —нун там һиссәсини көтүрә биләрик. Бурада N әдәдинин $\frac{1}{\varepsilon}$-дан вә я ε-дан асылылығы билаваситә көрүнүр.

Тутаг ки, $\varepsilon=\frac{1}{100}$-дир.

Онда $\frac{1}{\varepsilon}=100$

олар. $N=100$ көтүрсәк; $n>100$ олан бүтүн n-ләр үчүн

$$\left|\frac{n-1}{n}-1\right|=\frac{1}{n}=<\frac{1}{100}$$

олар, йә'ни ваһиддән фәрги $\frac{1}{100}$-дән кичик олан ардычыллыг һәдләрин нөмрәләри 100-дән бөйүк олмалыдыр.

Әкәр $\varepsilon=\frac{1}{300}$ көтүрсәк $n>\frac{1}{\varepsilon}=300$ олмалыдыр.

$\left|\frac{n-1}{n}-1\right|<\varepsilon$ олмасы үчүн $N=300$ көтүрмәк олар, йә'ни бу

һалда, ваһидлә фәргләри $\frac{1}{300}$-дән кичик олмасы үчүн ардычыллыг һәдләринин нөмрәләрини 300-дән бөйүк көтүрмәлийик. Демәли,

$$\varepsilon=\frac{1}{100} \text{ оланда } N=100,$$

$$\varepsilon=\frac{1}{300} \text{ оланда } N=300$$

көтүрүлмәлидир. Бу да бир даһа N-ин ε-дан асылылығыны билавеситә көстәрир.

Демәли, габагчадан верилән ихтияри ε әдәдинә көрә елә $N>0$ әдәди вардыр ки, $n>N$ олан бүтүн n-ләр үчүн

$$\left|\frac{n-1}{n}-1\right|<\varepsilon$$

олар, йә'ни $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}=1$,

бурада дәйишән кәмиййәт арта-арта өз лимитинә яхынлашыр.

2. Инди тутаг ки,

$$1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ .\ .\ .\ ,1,\ 0,\ .\ .\ . \qquad (3)$$

ардычыллығынын тәк ердә дуран һәдләри ваһид, чүт ердә дуран һәдләри исә сыфырдыр. (3) ардычыллығы лимити олмадығыны көстәрәк.

Әксини фәрз эдәк, тутаг ки, (3) ардычыллығынын, лимити вардыр вә бу лимит һәр һансы бир a әдәдинә бәрабәрдир. $\varepsilon>0$ габагчадан верилән ихтияри әдәддир вә фәрз эдәк ки, бу $\varepsilon>0$ әдәдинә көрә елә $N>0$ әдәди сечилмишдир ки, $n>N$ олан бүтүн натурал n-ләр үчүн

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

олур. N-дән бөйүк олан n әдәди чүтдүрсә $x_n=0$ олар, онда

$$|0-a|<\varepsilon$$

олмалыдыр, бу исә мүмкүн дейилдир, чүнки әввәлчә $\varepsilon=\frac{|a|}{2}$ көтүрсәйдик, тапдығымыз натурал N-дән бөйүк чүт n-ләр үчүн

$$|a|<\frac{|a|}{2}$$

йә'ни $1<\frac{1}{2}$ олмалы иди, бу да мүмкүн дейилдир. Демәли, (3) ардычыллығынын лимити йохдур. Сонлу лимити олмаян һәр бир ардычыллыға *дағылан ардычыллыг* дейилир.

3. Эйни гайда илә

$$1,-1,\ 1,\ldots,\ (-1)^{n-1},\ldots \qquad (4)$$

ардычыллығынын да дағылан олдуғуну көстәрә биләрик. Бу ардычыллығын үмуми һәддинин $x_n = (-1)^{n-1}$ олдуғуну асанлыгла йохламаг олар. n тәк оланда $x_n = +1$ вә n чүт оланда $x_n = -1$ олур.

Енә дә фәрз эдәк ки, (4) ардычыллығынын лимити вардыр вә бу лимит һәр һансы бир a әдәдинә бәрабәрдир. Онда габагчадан верилән һәр бир $\varepsilon > 0$ әдәдинә көрә элә натурал N әдәди вардыр ки, $n > N$ олан бүтүн n-ләр үчүн $|x_n - a| < \varepsilon$ олмалыдыр. $\varepsilon = \frac{|1 + a|}{2}$ көтүрәк. Онда бу ε-на уйғун элә натурал N әдәди вардыр ки, $n > N$ олан бүтүн n-ләр үчүн, о чүмләдән чүт n-ләр үчүн дә

$$|x_n - a| < \frac{|1 + a|}{2}$$

олмалыдыр; йә'ни чүт n-ләр үчүн

$$|-1 - a| < \frac{|1 + a|}{2}$$

олмалыдыр.

$|-1 - a| = |1 + a|$ олдуғундан $|1 + a| < \frac{|1 + a|}{2}$ олмалыдыр. Бу исә (4) ардычыллығы лимитинин варлығына даир фәрзиййәнин доғру олмадығыны айдын көстәрир.

4. Инди

$$1,\ 2^2,\ 3^2, \ldots,\ n^2, \ldots \tag{5}$$

ардычыллығынын һеч бир сонлу лимитә малик олмадығыны көстәрәк.

Тутаг ки, a әдәди (5) ардычыллығынын лимитидир. Онда габагчадан верилән һәр бир $\varepsilon > 0$ әдәдинә көрә элә $N > 0$ әдәди вардыр ки, $n > N$ оланда бүтүн n-ләр үчүн $|n^2 - a| < \varepsilon$ олмалыдыр. Айдындыр ки, $a > 0$-дыр. $\sqrt{a + \varepsilon}$ әдәдинин там һиссәсини n_0 илә ишарә эдәк. Онда $n_0 + 1 \geqslant \sqrt{a + \varepsilon}$ олар. Инди N вә $n_0 + 1$ әдәдләриндән бөйүк олан там әдәди n_1 илә ишарә эдәк. Айдындыр ки, n_1-дән бөйүк сонсуз сайда n-ләр вардыр. Белә n-ләр үчүн $n^2 > a + \varepsilon$ олачагдыр, йә'ни $n > N$ олан бүтүн n-ләр үчүн $n^2 - a > \varepsilon$ олачагдыр.

Бу исә фәрзиййәмизә зиддир. Демәли (5) ардычыллығы дағылан ардычыллыгдыр. (5) ардычыллығынын, габагчадан истәнилән гәдәр бөйүк олан һәр бир $M > 0$ әдәдиндән сонсуз сайда бөйүк һәдләринин олдуғуну көрмәк чәтин дейилдир.

5. Инди исә тутаг ки, $x_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$-дир. x_n-ин лимити-

нин сыфыр олдуғуну көстәрәк, йә'ни көстәрәк ки,

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \ldots$$

ардычыллығынын лимити сыфырдыр. Бурада дәйишән кәмиййәт өз лимитинә эһтизаз едә-едә яхынлашыр. n тәк әдәд олдугда дәйишән x_n кәмиййәтинин гиймәти мүсбәт, чүт олдугда исә мәнфидир, йә'ни дәйишмә просесиндә x_n каһ өз лимитиндән бөйүк каһ да кичик олур.

6. Верилмиш a сабит кәмиййәтинин лимитини тапаг.

Юхарыда гейд етдийимизә көрә һәр бир сабит кәмиййәтә гиймәтләри өзүнә бәрабәр олан дәйишән кәмиййәт кими баха биләрик. Она көрә дә $x_n = a$, $n = 1, 2, \ldots$ шәклиндә язсаг

$$a, a, a, \ldots, a, \ldots$$

ардычыллығыны әлдә едәрик. Исбат едәк ки, бу ардычыллығын лимити a-дыр. Доғрудан да, габагчадан верилән һәр бир мүсбәт ε әдәдинә көрә бүтүн натурал n-ләр үчүн

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

олар, чүнки

$$|a - a| = 0 < \varepsilon.$$

Демәли сабит кәмиййәтин лимити өзүнә бәрабәрдир.

7. Варлыг областы $0 \leqslant x \leqslant 2$ олан $f(x) = x^2$ функсиясынын x дәйишәни 1-ә яхынлашдыгда лимитини тапаг. Исбат едәк ки, бу лимит 1-дир. Тутаг ки, $\varepsilon > 0$ габагчадан верилән һәр һансы әдәддир. δ-ны сечәк. Айдындыр ки, әкәр ваһид x^2 функсиясынын $x \to 1$-да лимитидирсә $|x^2 - 1| < \varepsilon$ олмалыдыр, йә'ни $|x+1| \cdot |x-1| < \varepsilon$ олмалыдыр. Бурадан

$$|x - 1| < \frac{\varepsilon}{|1 + x|}$$

аларыг. $0 \leqslant x \leqslant 2$ олдуғундан $1 \leqslant 1 + x \leqslant 3$ олар. Онда $|x - 1| < \frac{\varepsilon}{3}$ көтүрәк вә $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ сечәк.

Айдындыр ки, $|x - 1| < \delta$ олдугда, $0 \leqslant x \leqslant 2$ олдуғу үчүн

$$|x^2 - 1| = (x + 1)\,|x - 1| \leqslant 3|x - 1| < 3\,\delta = \varepsilon$$

олар.

Демәли
$$\lim_{x \to 1} x^2 = 1;$$

бурада δ-нын ε-дан асылылығы айдын көрүнүр.

8. $f(x) = \frac{1}{x^2}$ функсиясынын $x \to \infty$-да лимитини тапаг.

Исбат эдәк ки, бу лимит сыфырдыр. Тутаг ки, $\varepsilon > 0$ әдәди гейд эдилмиш ихтияри әдәддир.

$$\left|\frac{1}{x^2} - 0\right| < \varepsilon$$

шәртини өдәйән x-ләри тапаг. Йә'ни бурада $\frac{1}{x^2} < \varepsilon$ олмалыдыр. Башга сөзлә, $x^2 > \frac{1}{\varepsilon}$, $|x| > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$ олмалыдыр. Мүтләг гиймәти $\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$-дән бөйүк олан бир x_0 көтүрәк, мәсәлән тутаг ки, $|x_0| = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} + 1$ олсун. Айдындыр ки, $|x| > |x_0|$ олан бүтүн x-ләр үчүн $|x| > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} + 1$ олачагдыр.

Онда

$$\frac{1}{x^2} < \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} + 1\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon} + 2\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} + 1} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

олмалыдыр. Дамәли, элә x_0 тапдыг ки, x-ин x_0 гиймәтиндән башлаяраг сонра кәлән бүтүн x-ләр үчүн, йә'ни $|x| \geqslant |x_0|$ бәрабәрсизлийини өдәйән бүтүн x-ләр үчүн

$$\left|\frac{1}{x^2} - 0\right| < \varepsilon$$

бәрабәрсизлийи өдәниләчәкдир. Бу исә

$$\lim_{x \infty +} \frac{1}{x^2} = 0$$

олдуғуну сүбут эдир.

9. Гейд этмәк лазымдыр ки, интуисияя әсасән күман эдилән лимит, кәмиййәтин һәгиги лимитинин эйни олмая да биләр. Мәсәлән, тутаг ки, узунлуғу a олан бир дүз хәтт парчасы n бәрабәр һиссәйә бөлүнмүшдүр. Ахырынчы CB парчасы мүсбәтә олмагла һәр бир һиссәни диаметр һесаб эдиб 18-чи шәкилдәки кими ярым чевраләр чәкәк (18-чи шәклә бахын, шәкилдә AB парчасы 5 бәрабәр ерә бөлүнмүшдүр).

Бу ярымчевраләр бирликдә бир учу A нөгтәсиндә, дикәр учу C нөгтәсиндә олан далғавари кәсилмәз хәтдән ибарәт олур. Инди бөлкү нөгтәләринин сайыны артыраг вә һәр дәфә AB парчасынын ени алынан һиссәләри үзәриндә, ахырынчы

бөлкү мүстәсна олмагла, ярым чеврәләр гураг. Бу артырманы һүдудсуз олараг давам этдирәк, йә'ни n-и сонсузлуға яхынлашдыраг ($n \to \infty$). Белә олдугда C нөгтәси B нөгтәсинә, далғавари хәтт исә AB дүз хәтт парчасына һүдудсуз олараг яхынлашыр. Бурада далғавари хәттин узунлуғунун, лимитинин AB пачасынын узунлуғу олан a әдәдинә бәрабәр олдуғуна һөкм эдә биләрикми?

18-чи шәкил

Бу мәсәләни һәлл эдәк. Шәртә көрә узунлуғу a олан AB парчасы n бәрабәр һиссәйә бөлүнмүшдүр. Онда, һәр һиссәнин узунлуғу $\frac{a}{n}$ олачагдыр. Бу һиссәләрин һәр бири диаметр олдуғундан чәкилән чеврәләрин радиуслары $\frac{a}{2n}$-ә бәрабәр олмалыдыр. Онда һәр бир ярымчеврәнин узунлуғу $\frac{\pi \cdot a}{2n}$ олачагдыр. Белә ярымчеврәләрдән $(n-1)$ гәдәр олдуғундан, бунларын топланмасындан әмәлә кәлән далғавари хәттин узунлуғу $(n-1)\frac{\pi a}{2n}$ олачагдыр.

Инди $n \to \infty$-да бу ифадәнин лимитини тапаг. Һәмин кәмиййәтин алдығы гиймәтләрини ардычыллыг шәклиндә язаг. $n=2$ оланда, йә'ни AB ики ерә бөлүндүкдә шәртә көрә AB үзәриндә бир дәнә ярымчеврә олачагдыр. Онда һәмин ярымчеврәнин узунлуғу

$$(n-1)\frac{\pi a}{2n} = (2-1)\frac{\pi a}{4} = \frac{\pi a}{4}$$

олачагдыр. $n=3$ оланда, AB парча 3 бәрабәр һиссәйә бөлүнәчәк, ярымчеврәләр исә ики дәнә олачагдыр. Онда алынан далғавари хәттин узунлуғу $(n-1)\frac{\pi a}{2n} = (3-1)\frac{\pi a}{2 \cdot 3} = \frac{\pi a}{3}$ олачагдыр. $n=4$ оланда исә шәкилдә шәртә көрә 3 дәнә ярымчеврә көтүрмәлийик, бу чеврәләрдән алынан далғавари хәттин узунлуғу

$$(4-1) \cdot \frac{\pi a}{2 \cdot 4} = 3 \cdot \frac{\pi a}{2 \cdot 4}$$

әдәдинә бәрабәр олачагдыр. Бу гайда илә давам этсәк

$$1 \cdot \frac{\pi a}{2 \cdot 2},\ 2 \cdot \frac{\pi a}{2 \cdot 3},\ 3 \cdot \frac{\pi a}{2 \cdot 4}, \ldots, (n-1)\frac{\pi a}{2n} \ldots$$

ардычыллығыны аларыг. Инди исбат эдәк ки, бу ардычыллығын лимити $\frac{\pi a}{2}$ -дир.

Бунун үчүн габагчадан верилән һәр бир мүсбәт ε әдәдинә көрә elә бир натурал N әдәди сечәк ки, $n>N$ олан бүтүн n-ләр үчүн

$$\left|(n-1)\frac{\pi a}{2n}-\frac{\pi a}{2}\right|<\varepsilon$$

олсун.

Бурада

$$(n-1)\frac{\pi a}{2n}=\frac{\pi a}{2}-\frac{\pi a}{2n}$$

шәклиндә язылa билдийиндән,

$$(n-1)\frac{\pi a}{2n}-\frac{\pi a}{2}=-\frac{\pi a}{2n}$$

олачагдыр.

Демәли

$$\left|-\frac{\pi a}{2n}\right|<\varepsilon$$

бәрабәрсизлийини тә'мин эдән n-ләри ε-а көрә сечмәлийик. Онда

$$\frac{\pi a}{2n}<\varepsilon$$

олмалыдыр. Бу бәрабәрсизлийин һәр ики тәрәфини мүсбәт ε әдәдинә бөлүб, n-ә вурсаг

$$n>\frac{\pi a}{2\varepsilon}$$

бәрабәрсизлийини аларыг.

$\frac{\pi a}{2\varepsilon}$ әдәдинин (π, a, ε мә'лум әдәдләрдир!) там һиссәсини N илә көстәрәк. (Демәк N әдәди ε-дан асылыдыр!)

Белә олдугда N-дән бөйүк бүтүн n-ләр үчүн, йә'ни $n>N$ үчүн

$$\frac{\pi a}{2n}<\varepsilon,$$

вә я

$$\left|(n-1)\frac{\pi a}{2n}-\frac{\pi a}{2}\right|<\varepsilon$$

олачагдыр. Башга сөзлә

$$\lim_{n\to\infty}(n-1)\frac{\pi a}{2n}=\frac{\pi a}{2}$$

олачагдыр.

Демәк $n \to \infty$-да далғавари хәттин узунлуғу AB парчасынын узунлуғуна (a) дейил, $\frac{\pi a}{2} \simeq 1{,}57a$ әдәдинә бәрабәр олур.

Һалбуки, интуисияя истинад эдиб нәтичә чыхарсайдыг, дейәрдик ки, далғавари хәттин узунлуғу мүәййән бөлкүдән башлаяраг AB парчасынын узунлуғуна, йә'ни „a“-я чох яхын олачагдыр. Кәмиййәтин лимитинә верилән дүзкүн тә'рифә истинад этдикдә исә бу лимитин a-дан тәхминән 1,57 дәфә бөйүк олдуғуну мүәййән этдик. Демәли кәмиййәтин мүәййән бир әдәдә яхынлашдығыны садәчә һисс этмәк аздыр, бурада кәмиййәтин һәмин лимитә яхынлашмасынын сүр'әтини дә дүзкүн мүәййән этмәк лазымдыр.

Дәйишән кәмиййәтин мүәййән әдәдә яхынлашмасында онун яхынлашма сүр'әтинин бөйүк ролу вардыр.

§ 8. СОНСУЗ КИЧИЛӘН ВӘ СОНСУЗ БӨЙҮЙӘН КӘМИЙЙӘТЛӘР ҺАГГЫНДА

Сонсуз кичилән кәмиййәтләр. Биз сыфра йығылан ардычыллыг (§ 6, (1) ардычыллығы) тәшкил эдән дәйишән кәмиййәтдән бәһс этдик. Белә дәйишән кәмиййәтләр олдугча чохдур. Бу дәйишән кәмиййәтләрин тәшкил этдийи ардычыллыгларын сыфра йығылмасы вә я лимитләринин сыфыр олмасы хассәси онлары бир синифдә бирләшдирән әсас чәһәтдир.

Тә'риф. Лимити сыфра бәрабәр олан кәмиййәтләрә *сонсуз кичилән кәмиййәтләр* дейилир.

Башга сөзлә десәк, мүтләг гиймәти мүәййән ердән башлаяраг габагчадан верилән һәр бир $\varepsilon > 0$ әдәдиндән кичик олан вә кичилмәкдә давам эдән дәйишән кәмиййәтә *сонсуз кичилән кәмиййәт* дейилир. Белә олдугда, ихтияри $\varepsilon > 0$ әдәдинә көрә һәмишә элә натурал $N > 0$ олан әдәди тапмаг олар ки, $n > N$ олмагла бүтүн n-ләр үчүн дәйишән x_n ($n = 1, 2, \ldots$) кәмиййәтинин алдығы x_N гиймәтиндән сонра кәлән бүтүн x_n гиймәтләри үчүн

$$|x_n - 0| = |x_n| < \varepsilon$$

бәрабәрсизликләри өдәниләчәкдир.

Тә'рифдән айдындыр ки, лимити мүәййән a әдәди олан ардычыллығын һәдләри илә a әдәди арасындакы фәрг, $\alpha_n = x_n - a$ сонсуз кичилән кәмиййәтдир. Доғрудан да, бу һалда, лимитин тә'рифинә көрә габагчадан верилән һәр бир $\varepsilon > 0$ әдәдинә көрә элә бир натурал N әдәди вардыр ки, $n > N$ оланда

$$|\alpha_n| = |x_n - a| < \varepsilon$$

олар. Демәли, $\alpha_n = x_n - a$ сонсуз кичилән кәмиййәтдир. Бурадан $x_n = a + \alpha_n$ олар, йә'ни лимити a-я бәрабәр олан x_n ($n = 1, 2, \ldots$) дәйишән кәмиййәтини $x_n = a + \alpha_n$ шәклиндә көстәрә биләрик. Бурада α_n мүәййән сонсуз кичилән кәмиййәтдир.

Тәрсинә, әкәр дәйишән x_n ($n=1, 2,\ldots$) кәмиййәти $x_n = a + \alpha_n$ шәклиндәдирсә, онда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ олар. Бурада α_n верилмиш сонсуз кичилән кәмиййәтдир. Доғрудан да, α_n сонсуз кичилән кәмиййәт олдуғундан габагчадан верилән һәр бир мүсбәт ε әдәдинә көрә elә $N>0$ әдәди тапмаг олар ки, $n>N$ оланда $|\alpha_n|<\varepsilon$ олар. Шәртә көрә $\alpha_n = x_n - a$-дыр. Демәли, $n>N$ оланда $|x_n - a|<\varepsilon$ олар.

Она көрә, x_n ($n=1,2,\ldots$) кәмиййәтинин лимити a-дыр, йә'ни

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Мисаллар. Гиймәтләри $x_n = \frac{2+(-1)^n}{n}$ гануну илә дәйишән бир кәмиййәт көтүрәк. Бурада натурал n әдәди тәк оланда $(-1)^n = -1$ олдуғу үчүн, $x_n = \frac{2-1}{n} = \frac{1}{n}$ олур. n чүт оланда исә $(-1)^n = 1$ олдуғу үчүн, $x_n = \frac{2+1}{n} = \frac{3}{n}$ олур.

Беләликлә,

$$1,\ \frac{3}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{3}{6},\ldots$$

ардычыллығыны әлдә этмиш олуруг. Бу ардычыллығын лимитинин сыфыр олдуғуну көстәрәк.

Тутаг ки, $\varepsilon>0$ габагчадан верилән вә истәнилән гәдәр кичик әдәддир. Айдындыр ки, бүтүн n-ләр үчүн

$$|x_n| \leqslant \frac{3}{n}$$

олур. $|x_n|<\varepsilon$ бәрабәрсизликләрини өдәйән n-и тапаг. Бунун үчүн $\frac{3}{n}<\varepsilon$ бәрабәрсизлийини көтүрәк. Һәмин бәрабәрсизлийин һәр тәрәфини натурал n әдәдинә вуруб ε-на бөлсәк

$$n>\frac{3}{\varepsilon}$$

аларыг.

$\frac{3}{\varepsilon}$ әдәдинин там һиссәсини N илә ишарә этсәк, онда $|x_n|<\varepsilon$ олар.

Демәли,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Бу мисалын сәчиййәви тәрәфи ондадыр ки, бурада дәйишән кәмиййәт нөвбә илә өз лимити олан сыфра каһ яхынлашыр, каһ да узаглашыр. Әкәр бу йолла гиймәтләри

$$x_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$$

гануну илә дәйишән кәмиййәти нәзәрдән кечирмиш олсаг, көрәрик ки, һәр бир $\varepsilon>0$ әдәдинә көрә һәмишә элә N вардыр ки, $n>N$ оланда $|x_n| \leqslant \frac{2}{n} < \varepsilon$ олар. Онун үчүн N-и $\frac{2}{\varepsilon}$ әдәдинин там һиссәсинә бәрабәр көтүрмәк кифайәтдир. Бу дәйишән кәмиййәтин хүсусилийи ондадыр ки, n әдәди тәк оланда $x_n = 0$, n әдәди чүт олдугда исә $x_n = \frac{2}{n}$ олур. Демәли, нәзәрдән кечирдийимиз дәйишән кәмиййәтин тәк ердә дуран һәдләри һәмин дәйишән кәмиййәтин лимитинә бәрабәр олур. Арашдырдығымыз мисалларда дәйишән кәмиййәтин өз лимитинә мүхтәлиф гайда илә яхынлашдығыны көрдүк. Дәйишән кәмиййәт каһ азала-азала, каһ да арта-арта, каһ өз лимит гиймәтини ала-ала, каһ да лимит гиймәтиндән һәм узаглашыб, һәм дә яхынлашмагла, эһтизаз эдәрәк, өз лимитинә яхынлашыр. Кәмиййәтләрин бу чохчәһәтли тәбиәти онларын практика үчүн, мәишәт үчүн сон дәрәчә ярарлы олдуғуна чанлы мисалдыр.

Сонсуз бөйүйән кәмиййәтләр. § 7-дә (5) ардычыллығындан данышаркән бу ардычыллығын габагчадан верилән һәр бир мүсбәт бөйүк әдәди мүтләг гиймәтчә ашан сонсуз сайда һәдләри олдуғу гәнаәтини һасил этдик. Гиймәтләри һәмин хассәйә малик олан дәйишән кәмиййәтләр чохдур. Бу чүр кәмиййәтләри бир синфә йыған, онлары бирләшдирән үмуми чәһәт ондан ибарәтдир ки, бу дәйишән кәмиййәтин мүтләг гиймәтләриндән дүзәлән ардычыллыгларын һәдләринин дурдуглары ерин нөмрәси артдыгча һәдләринин гиймәти дә гейри-мәһдуд артыр. Бунун даһа дәгиг олан ашағыдакы тә'рифини верәк.

Тә'риф. Әкәр габагчадан верилән һәр бир бөйүк мүсбәт M әдәдинә көрә элә натурал N әдәди сечмәк мүмкүндүрсә вә бу һалда $n>N$ олан бүтүн n-ләр үчүн $|x_n|>M$ оларса, онда x_n дәйишән кәмиййәтинә *сонсуз бөйүйән кәмиййәт* дейилир вә $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ вә я $x_n \to \infty$ шәклиндә көстәрилир.

Бу дәйишән кәмиййәт өз дәйишмә просесиндә муәййән гиймәтдән башлаяраг мүсбәт гиймәтләр аларса, ону $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ илә, мәнфи гиймәтләр алдыгда исә $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ илә ишарә эдилир.

Мисаллар. 1. $x_n = n^2$.

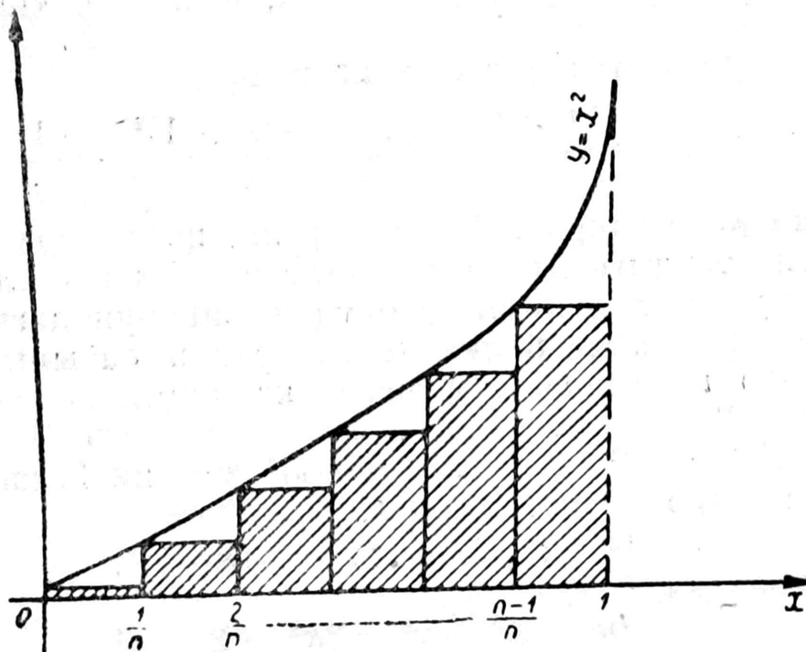
Бу һалда, $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ олар.

2. $x_n = -n^3$

Бу һалда $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}(-n^3) = -\infty$ олачагдыр.

Әкәр x_n сонсуз азалан кәмиййәтдирсә, онда $\frac{1}{x_n}$ сонсуз бөйүйәндир вә тәрсинә (йохлайын).

Лимитләр үсулу, юхарыда гейд этдийимиз кими, һәндәсә вә чәбр үсулу илә һәлл олунмаян бә'зи мәсәләләрин һәллиндә мүвәффәгиййәтлә тәтбиг эдилир. $y=x^2$ параболу, x оху вә $x=1$ дүз хәтти арасында галан саһәнин тапылмасы фикримизин доғрулуғуну көстәрән мисаллардан биридир. Көстәрилән хәтләрлә әһатә олунан саһәни шәкилдә көстәрәк. Она көрә дә



19-чу шәкил

XOY дүзбучаглы координат системини көтүрәк (19-чу шәклә бах) вә $y=x^2$, $x=1$ хәтләрини чәкәк.

[0,1] парчасыны $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1$ нөгтәләри илә n бәрабәр һиссәйә айыраг. Бу нөгтәләрин һәр бириндән $y=x^2$ параболуну кәсәнә гәдәр перпендикулярлар галдыраг.

Алынан парчаларын үзәриндә сол юхары бучағы парабол үзәриндә олан дүзбучаглылар гураг. Бу дүзбучаглылар шәкилдә гараланмышдыр. Һәмин дүзбучаглыларын саһәләрини һесаблаяг. Отурачагларынын узунлуғу $\frac{1}{n}$ олан бу дүзбучаглыларын һүндүрлүкләрини тапмаг үчүн алынан парчаларын сол учларынын абсисләрини $y=x^2$ ифадәсиндә x-ин еринә язмаг лазымдыр. Она көрә дә, биринчи дүзбучаглынын саһәси, $0 \cdot \frac{1}{n}$; икинчи дүзбучаглынын саһәси $\left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}$; үчүнчү дүз-

бучаглынын саһәси $\left(\frac{2}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}$ вә и. а.; ахырынчы дүзбучаглынын саһәси $\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}$ олачагдыр. Бу саһәләри топласаг гараланмыш пилләвари фигурун саһәсини әлдә эдәрик. Пилләвари фигурун саһәсини S_n илә ишарә эдәрәк.

$$S_n = 0\cdot\frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n} + \ldots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}$$

аларыг. Бурадан $\frac{1}{n}$ вуруғуну мө'тәризә харичинә чыхарыб галан ифадәни ортаг мәхрәчә кәтирсәк

$$S_n = \frac{1^2\cdot 2^2 + \ldots + (n-1)^2}{n^2}\cdot\frac{1}{n}$$

ифадәсини әлдә эдирик. Айдындыр ки, пилләвари фигурун саһәси үчүн тапдығымыз бу гиймәт $y=x^2$ параболу, ox оху вә $x=1$ дүз хәтти илә әһатә олунан фигурун һәгиги саһәсиндән кичикдир. Лакин бөлкү нөгтәләринин сайыны артырмагла бу ики саһә арасындакы фәргин кичилдийини көрмәк чәтин дейилдир.

Инди $1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2$ чәмини һесаблаяг.

Бу чәми σ_n илә ишарә эдәк:

$$\sigma_n = 1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2.$$

Она көрә дә,

$$(к+1)^3 - к^3 = 3к^2 + 3к + 1$$

эйнилийини язаг вә $к$ әдәдинә $1, 2, \ldots, n-1$ гиймәтләри вериб алынан

$$2^3 - 1^3 = 3\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 1,$$
$$3^3 - 2^3 = 3\cdot 2^2 + 3\cdot 2 + 1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(n-1+1)^3 - (n-1)^3 = 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1$$

бәрабәрликләрини тәрәф-тәрәфә топлаяг. Айдындыр ки, сол тәрәфдә эйни гүввәтләрин һамысы ислаһ олуначагдыр; сағда исә ортаг вуруглары мө'тәризә харичинә чыхарсаг

$$n^3 - 1 = 3\cdot[1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2] + 3(1 + 2 + \ldots + n - 1) + (n-1)$$

аларыг, чүнки сағда 1 әдәди $(n-1)$ дәфә өз-өзү илә топланмалыдыр. Ашкардыр ки,

$$1 + 2 + \ldots + n - 1 = \frac{(1+n-1)(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Белә олдугда σ_n чәминә көрә

$$n^3-1=3\sigma_n+3\cdot\frac{n(n-1)}{2}+(n-1)$$

бир дәрәчәли бир мәчһуллу тәнлик әлдә етмиш олуруг. Бу тәнлийи һәлл едирик:

$$3\sigma_n=(n^3-1)-\frac{3n(n-1)}{2}-(n-1)=$$

$$=\frac{2(n^3-1)-3n(n-1)-2(n-1)}{2}=$$

$$=\frac{(n-1)(2n^2+2n+2-3n-2)}{2}=\frac{(n-1)n(2n-1)}{2}.$$

Бурадан

$$\sigma_n=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

олур. Беләликлә,

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2=\frac{(n-1)\cdot n(2n-1)}{6}$$

формулуну әлдә едирик.

Онда пилләвари фигурун саһәси

$$S_n=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}$$

вә я

$$S_n=\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$$

олур. Бу ифадәни

$$S_n=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right)$$

шәклиндә язаг. Сағ тәрәфдәки ифадәни ачсаг

$$S_n=\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{6n^2}-\frac{1}{2n}\right)$$

олдуғуну көрәрик.

$$\frac{1}{6n^2}-\frac{1}{2n}=\alpha_n$$

илә ишарә едәк. Айдындыр ки, $n\to\infty$ шәртилә α_n кәмиййәти сыфра яхынлашыр. Демәли, α_n сонсуз кичилән кәмиййәтдир. Дикәр тәрәфдән

$$S_n=\frac{1}{3}+\alpha_n$$

олур. Юхарыда гейд етдийимиз хассәйә әсасән бир кәмиййәт сонунчу шәкилдә ифадә едилмишдирсә онда,

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{3}$$

олдуғуну һөкм эдә биләрик. Демәли, ахтардығымыз фигурун саһәси, тәрәфи 1-ә бәрабәр олан квадратын саһәсинин үчдә биринә бәрабәрдир.

§ 9. АЗАЛАН ҺӘНДӘСИ СИЛСИЛӘ

Бир сыра мәсәләләрин һәллиндә азалан һәндәси силсиләнин лимитини тә'йин этмәк лазым кәлир. Белә ардычыллыглары бир арая йығыб, онларын лимитини тә'йин эдәк.

Тутаг ки, $a_1\ a_2, \ldots, a_n \ldots$

ортаг вуруғу q олан азалан һәндәси силсиләдир ($|q|<1$). Айдындыр ки, һәмин ардычыллығын үмуми һәдди

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-}$$

формулу илә тә'йин эдиләчәкдир. Ардычыллығын хүсуси чәмләри исә үмуми һәдди

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

олан бир ардычыллыг әмәлә кәтирәчәкдир. Азалан һәндәси *силсиләнин чәми*, онун хүсуси чәмләриндән дүзәлән ардычыллығын лимитинә дейилир. Бу лимитин $\frac{a_1}{1-q}$-ә бәрабәр олдуғуну исбат эдәк. Мә'лум олдуғуна көрә:

$$S_n = \frac{a_1 - a_1 \cdot q^n}{1-q}.$$

Бу ифадәни белә яза биләрик:

$$S_n = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1 \cdot q^n}{1-q}.$$

Бурадан

$$\left|S_n - \frac{a_1}{1-q}\right| = \left|\frac{a_1}{1-q}\right| |q|^n$$

алынар. Һәмин бәрабәрлийин сағ тәрәфиндә дуран ифадәнин коэфисиенти n-дән асылы дейилдир. $|q|<1$ олдуғундан сағ тәрәф n-ин гейри-мәһдуд артмасы илә азалыб сыфра яхынлашыр. Она көрә дә элә $N>0$ тапмаг олар ки, сағ тәрәф $n>N$ олдугда габагчадан верилән ихтияри $\varepsilon>0$ әдәдиндән кичик эдилә биләр.

Демәли,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}.$$

Башга сөзлә, азалан һәндәси силсиләнин лимити, сурәти биринчи һәддә вә мәхрәчи ваһидлә ортаг вуруғун фәргинә бәрабәр олан бир кәсрдир.

Мисаллар. Верилән $\alpha = 0.5555 \ldots$ дөври онлуг кәсри, ади кәсрә чевирәк.

Айдындыр ки,

$$\alpha = \frac{5}{10} + \frac{5}{100} + \frac{5}{1000} + \ldots$$

шәклиндә язылa биләр. Бу ифадә, биринчи һәдди $\frac{5}{10}$ вә ортаг вуруғу $\frac{1}{10}$ олан азалан һәндәси силсиләдир. Она көрә дә

$$\alpha = \frac{\frac{5}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{5}{9}$$

олар, йә'ни

$$0,555\ldots = \frac{5}{9} \text{ олар.}$$

Инди исә

$$\alpha = 0,999\ldots$$

дөври онлуг кәсрини ади кәсрә чевирәк.

$$\alpha = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \ldots$$

олдуғундан бу чәмә биринчи һәдди $\frac{9}{10}$, ортаг вуруғу $\frac{1}{10}$ олан азалан һәндәси силсиләнин хүсуси чәмләринин лимити кими баха биләрик.

Она көрә дә

$$\alpha = \frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{9}{9} = 1$$

олар. Демәли,

$$0,999\ldots = 1.$$

Бурадан белә бир нәтичә дә әлдә едә биләрик:

$$\alpha = 0,272$$

вә

$$\beta = 0,271999\ldots$$

дөври онлуг кәсрләри ейни ади кәсри ифадә едир.

Доғрудан да,

$$\beta = 0,271 + \frac{9}{10000} + \frac{9}{100000} + \ldots =$$

$$= 0,271 + \frac{1}{1000}\left(\frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \ldots\right) = 0,271 + \frac{1}{1000} = 0,272.$$

Башга сөзлә ейни бир расионал әдәдә ялныз бир онлуг кәср дейил бир нечәси уйғун кәлир.

Бу дейиләнләри үмумиләшдирәрәк китабын биринчи һиссәсиндә исбатыны тәхирә салдығымыз үмуми тәклифи исбат эдәк: **бүтүн дөври кәсрләр расионал әдәдләрдир.**

Тутаг ки,

$$r = 0,\ a_1\ a_2\ \ldots\ a_m\ b_1\ b_2\ \ldots\ b_n\ b_1\ b_2\ \ldots\ b_n\ b_1\ b_2\ \ldots\ b_n\ \ldots$$

ифадәси дөври онлуг кәсрин үмуми шәклидир. Бурада $a_1\ a_2\ \ldots\ a_m$ дөври кәсрин тәкрар этмәйән онлуг ишарәләри групу, $b_1\ b_2\ \ldots\ b_n$ исә тәкрар эдән онлуг ишарәләри групудур. Бу онлуг дөври кәсри

$$S = 0,\ b_1\ b_2\ \ldots\ b_n\ b_1\ b_2\ \ldots\ b_n\ \ldots$$

илә ишарә эдәк. Бурада $b_1\ b_2\ \ldots\ b_n$ дөврдә иштирак эдән онлуг ишарәләр групудур. Бу һалда белә яза биләрик:

$$r = 0,\ a_1\ a_2\ldots a_m + \frac{b_1}{10^{m+1}} + \frac{b_2}{10^{m+2}} + \ldots + \frac{b_n}{10^{m+n}} + \frac{b_1}{10^{m+n+1}} + \frac{b_2}{10^{m+n+2}} + \ldots + \frac{b_n}{10^{m+2n}} + \ldots$$

вә я

$$r = 0,a_1 \cdot a_2\ \ldots\ a_m + \frac{1}{10^m}\left[\left(\frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \ldots + \frac{b_n}{10^n}\right) + \frac{1}{10^n}\left(\frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \ldots + \frac{b_n}{10^n}\right) + \ldots\right] = 0,\ a_1\ a_2\ \ldots\ a_m + \frac{1}{10^m}\left[S + \frac{1}{10^n}\cdot S + \frac{1}{10^{2n}}\cdot S + \ldots\right].$$

Азалан сонсуз һәндәси силсиләнин чәминин формулуна көрә:

$$1 + \frac{1}{10^n} + \frac{1}{10^{2n}} + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{1}{10^n}} = \frac{10^n}{10^n - 1}.$$

Демәли,

$$r = 0,\ a_1 a_2\ \ldots\ a_m + \frac{S}{10^m}\cdot\frac{10^n}{10^n - 1}.$$

Һәмин ифадәнин сағ тәрәфини ортаг мәхрәчә кәтирмәклә $\frac{p}{q}$ шәклинә дүшәчәйини йәгин этмәк чәтин олмаз.

§ 10. МОНОТОН АРДЫЧЫЛЛЫГЛАР

Кәмиййәтин лимитинин тапылмасы мәсәләсиндә әввәлчәдән бу кәмиййәтин лимитинин варлығыны билмәк дә чох әһәмиййәтли мәсәләдир.

Кәмиййәтин лимитини габагчадан мүәййән эдән бир нечә әламәт вардыр. Бу әламәтләрдән бири § 12-дә көстәрилә-

чәкдир. Лакин елә ардычыллыглар вардыр ки, онларын лимитинин варлығыны ашағыдакы принсипләрин көмәйи илә мүәййән етмәк олар.

Белә ардычыллыглардан монотон ардычыллығы көстәрә биләрик.

Тә'риф. Һәдләри $a_{n+1} > a_n$ бәрабәрсизлийини өдәйән ардычыллыглара *монотон артан ардычыллыг*, һәдләри $a_n > a_{n+1}$ бәрабәрсизлийини өдәйән ардычыллыглара исә *монотон азалан ардычыллыг* дейилир.

Мисаллар. $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$

ардычыллығы монотон артандыр.

Доғрудан да, бурада

$$a_n = \frac{n}{n+1}, \quad a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$$

олдуғундан

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+2)(n+1)} =$$

$$= \frac{1}{(n+2)(n+1)}$$

олур. Бу ифадәнин сағ тәрәфи бүтүн натурал n-ләрә көрә мүсбәт олдуғундан

$$a_{n+1} > a_n$$

олачагдыр, йә'ни верилмиш ардычыллығын бүтүн һәдләри

$$a_{n+1} > a_n$$

мүнасибәтинә табедир.

Демәли, бу ардычыллыг монотон артандыр.

2. $1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \ldots, \frac{1}{n^2}, \ldots$

ардычыллығы исә монотон азаландыр. Доғрудан да, бурада

$$a_n = \frac{1}{n^2}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$$

олдуғу үчүн айдындыр ки, $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2}$, чүнки сурәтләри бәрабәр олан кәсрләрдән мәхрәчи бөйүк олан кәср кичикдир. Демәли, $a_{n+1} < a_n$ олур. Башга сөзлә, верилән ардычыллыг монотон азалан ардычыллыгдыр.

Монотон артан вә азалан ардычыллыға бирликдә *монотон ардычыллыг* дейилир.

Һәр бир монотон ардычыллығын йығылдығыны һөкм этмәк мүмкүн дейилдир. Мәсәлән,

$$1, 2, 3, \dots n, \dots$$

натурал әдәдләр ардычыллығы монотон артандыр, йығылан дейилдир. Лакин монотон артан ардычыллығы юхарыдан мәһдуддурса, йә'ни ардычыллығын бүтүн һәдләри мүәййән бир V әдәдиндән кичикдирсә, онда белә бир ардычыллығын V-дән бөйүк олмаян лимитә малик олмасына зеһнән дә олса, инанмаға әсасымыз вардыр. Верилмиш ардычыллығын бүтүн һәдләри мүәййән бир V әдәдиндән бөйүк оларса, онда белә ардычыллыға *ашағыдан мәһдуд ардычыллыг* дейилир. Ашағыдан мәһдуд монотон азалан ардычыллығын лимитинин V-дән кичик олмаячағына инана биләрик.

Бу әламәтләрә *монотон ардычыллыглар принсипи* дейирләр. Һәмин принсипә көрә, **юхарыдан мәһдуд олан һәр бир монотон артан ардычыллығын лимити вардыр.** Eләчә дә, **ашағыдан мәһдуд олан һәр бир монотон азалан ардычыллығын лимити вардыр.**

Монотон ардычыллыглар принсипинин интуитив олмасына вә инкар эдилмәз бир һәгигәтә бәнзәмәсинә бахмаяраг, онун чидди риязи исбатына эһтияч вардыр.

Тутаг ки,

$$a_1\ a_2 \dots\ a_n \dots \qquad (1)$$

монотон артан мәһдуд әдәдләр ардычыллығыдыр. Һәмин ардычыллыгда бу әдәдләри сонсуз онлуг кәсрләрлә ифадә эдәк:

$$a_1 = p_0^{(1)},\ p_1^{(1)}\ p_2^{(1)} \cdots p_n^{(1)} \cdots$$
$$a_2 = p_0^{(2)},\ p_1^{(2)}\ p_2^{(2)} \cdots p_n^{(2)} \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_к = p_0^{(к)},\ p_1^{(к)}\ p_2^{(к)} \cdots p_n^{(к)} \cdots$$

бурада $$p_0^{(1)},\ p_0^{(2)},\ p_0^{(3)}, \dots, p_0^{(к)}, \dots$$

мәһдуд там әдәдләр ардычыллығыдыр. Бу ардычыллыг монотон артан вә мәһдуд олдуғундан онун һәдләри $к$-нын артмасы илә гейри-мәһдуд арта билмәз. Eлә бир N_0 нөмрәси вардыр ки, бу нөмрәли һәддән сонра кәлән ($к \geqslant N_0$) ардычыллығын һәдләри өзләринин ән бөйүк гиймәтини алачаг вә бу гиймәт ардычыллығын һәдләринин нөмрәси ($к \geqslant N_0$) дәйишдикчә дәйишмәйәчәкдир. Һәмин сабит әдәди (ардычыллығын өз һәддидир) α_0 илә ишарә эдәк.

Инди веркүлдән сонра биринчи сүтунда дуран әдәдләр ардычыллығыны нәзәрдән кечирәк:

$$p_1^{(1)}\ p_1^{(2)} \cdots p_1^{(к)} \cdots$$

үмумиййәтлә n, $\kappa = 1, 2,...$ олдугда $p_n^{(\kappa)}$ онлуг ишарәләри 0-дан 9-а кими натурал гиймәтләр алыр.

Нөмрәси N_0-дан сонра кәлән ардычыллығын һәдләрини нәзәрдән кечирәк ($\kappa \geqslant N_0$). Тутаг ки, α_1 һәмин ардычыллығын, нөмрәси N_0-дан сонра кәлән һәдләри ичәрисиндә биринчи тәсадүф едилән вә нөмрәси N_1 олан ән бөйүк һәддидир ($N_1 \geqslant N_0$ олачағы айдындыр). α_1-ә биринчи дәфә тәсадүф етдикдән сонра һәр дәфә тәкрар едәчәкдир. Әкәр бу ардычыллығын сонра кәлән һәдләри азалсайды онда һәмин һәдләрин нөмрәләри N_0-дан бөйүк олдуғундан a_{N_0+1}, a_{N_0+2},... сабит олдуғу үчүн әсас ардычыллылыг монотон артан олмазды.

Инди онлуг кәсрләрин икинчи сүтунунун һәдләриндән дүзәлмиш

$$p_2^{(1)}, p_2^{(2)}, ..., p_2^{(\kappa)}, ...$$

ардычыллығыны нәзәрдән кечирәк. Нөмрәси N-дән бөйүк олан һәдләри нәзәрдән кечирсәк көрәрик ки, мүәййән N_2 нөмрәсиндән ($N_2 \geqslant N_1 \geqslant N_0$) сонра кәлән һәдләр һәр һансы натурал α_2 әдәдинә бәрабәр олачагдыр. Бу гайда илә галан сүтунлардан дүзәлән ардычыллыгларын лимитләрини, α_3, α_4,... әдәдләрини вә уйғун N_3, N_4 вә и. а. нөмрәләрини тә'йин едә биләрик. Алынан әдәди язаг:

$$\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n \cdots$$

Бу әдәдин (1) ардычыллығынын лимити олдуғуну исбат едәк. Тутаг ки, $\varepsilon > 0$ габагчадан верилән әдәддир. $\frac{1}{10^m} \leqslant \varepsilon$-у өдәйән m-и тапаг. Айдындыр ки, $n > N_m$ олан бүтүн α_n һәдләринин там вә биринчи m онлуг ишарәләри $\alpha = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n \cdots$ әдәдинин там вә уйғун онлуг ишарәләри илә ейни олачагдыр. Она көрә дә $n \geqslant N_m$ олдугда

$$|a_n - \alpha| < \frac{1}{10^m} < \varepsilon$$

олачагдыр, йә'ни (1) монотон артан ардычыллығы мүәййән α һәгиги әдәдинә йығылыр.

Монотон ардычыллыглар принсипиндән истифадә едиб, чохлу әдәдләр тә'йин етмәк олар. Бунлардан бир нечәси риязиййатда тутдуғу мөвгеләринә көрә чох әһәмиййәтлидир.

1. e әдәди (ейлер әдәди)

Биринчи n натурал әдәдләрин һасилини $n!$ илә көстәрәк (n факториал):

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n.$$

Үмуми һәдди

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

гануну илә тә'йин эдилән ардычыллығы нәзәрдән кечирәк. Ашкардыр ки, бу ардычыллыг монотон артандыр, чүнки

$$a_{n+1}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}$$

вә

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{(n+1)!}>0.$$

Дикәр тәрәфдән бу ардычыллыг юхарыдан мәһдуддур. Доғрудан да мәхрәчдәки 2-дән бөйүк натурал әдәдләри 2 илә әвәз этсәк

$$\frac{1}{\kappa!}=\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdots\kappa}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdots\frac{1}{\kappa}<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdots\frac{1}{2}=\frac{2}{2^{\kappa-1}};$$ аларыг.

κ-я 2, 3,... n гиймәтләрини версәк

$$a_n<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=$$

$$=1+2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]<3$$

аларыг. Демәли $a_n<3$ олур (бүтүн n-ләр үчүн). Монотон артан ардычыллыгларын принсипинә көрә $n\to\infty$ шәртиндә a_n мүәййән лимитә яхынлашмалыдыр. Бу лимити e әдәди илә ишарә эдәк:

$$\lim_{n\to\infty} a_n=e.$$

Демәли,

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots \tag{2}$$

бу ифадә васитәсилә e әдәдини истәнилән дәгигликлә һесаблая биләрик. Бу әдәд

$$e=2,\ 71828183...$$

сонсуз онлуг кәсрилә ифадә эдилә биләр. Суал олунур: бу онлуг кәср дөвридирми, йә'ни e әдәди расионалдырмы? Һәмин суалын чавабы мәнфидир. e әдәди иррасионалдыр. Әксини фәрз эдәк, йә'ни тутаг ки, e расионал әдәддир. Онда $e=\frac{p}{q}$ шәклиндә көстәрилмәлидир. $2<e<3$ олдуғундан e там әдәд дейилдир. Демәли, q—ән азы 2 олмалыдыр. (2) эйнилийинин һәр тәрәфини $q!$-а вурсаг аларыг:

$$e\cdot q!=p\cdot2\cdot3\cdots(q-1)=[q!+q!+3\cdot4\cdots q+4\cdot5\cdots q+$$
$$+\cdots+(q-1)q+q+1]+\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\cdots$$

Бу бәрабәрлийин сол тәрәфи вә сағ тәрәфдә орта мө'тәризә ичәрисиндәки әдәдләр тамдыр, сағ тәрәфдә галыг һәдди исә там дейилдир. Бу галыг һәдди $\frac{1}{2}$-дән кичикдир. Доғрудан да, $q \geqslant 2$ олдуғундан вә галыгда алынан

$$\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)\ (q+2)} + \cdots$$

ифадәсинин һәр һәдди

$$\frac{1}{3},\ \frac{1}{3^2}, \ldots$$

азалыр. Һәндәси силсиләнин уйғун һәдләрини ашмадығындан вә һабелә

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

олдуғундан эдилән һөкм доғрудур.

2. Һәгиги әдәдләр расионал әдәдләрин лимитидир

Әдәдләр ардычыллыглары әдәдләр синфини кенишләндирмәк үчүн әсас эһтият мәнбәидир. Һәр бир һәгиги әдәдин мүәййән әдәдләр ардычыллығынын лимити кими тә'йин эдилмәси ени тәбиәтли әдәдләрин яранмасында әсас амил олмушдур. Әввәлчә һәр бир һәгиги әдәдин өзүнүн эксийи вә артығы илә көтүрүлән сонлу онлуг һиссәләри ардычыллығынын лимити олдуғуну исбат эдәк. Тутаг ки, ихтияри мүсбәт α һәгиги әдәди верилмишдир:

$$\alpha = \alpha_0,\ \alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_n \cdots$$

Белә бир

$$a_1 = \alpha_0,\ \alpha_1;\ a_2 = \alpha_0,\ \alpha_1\ \alpha_2; \cdots;\ a_n = \alpha_0,\ \alpha_1 \cdots \alpha_n; \cdots$$

вә

$$a_1^1 = \alpha_0,\ \alpha_1 + \frac{1}{10};\ a_2^1 = \alpha_0,\ \alpha_1\ \alpha_2 + \frac{1}{100}; \cdots;\ a_n^1 = \\ = \alpha_0,\ \alpha_1 \cdots \alpha_n + \frac{1}{10^n}; \cdots$$

әдәдләр ардычыллыгларыны нәзәрдән кечирәк.

Мә'лумдур ки,

$$0 < \alpha - a_n < \frac{1}{10^n} \quad \text{вә} \quad 0 < a_n^1 - \alpha < \frac{1}{10^n}$$

олар.

ε—габагчадан верилән ихтияри мүсбәт әдәддир. Онда элә бир натурал N әдәди тапмаг олар ки, $n>N$ олдугда

$$|\alpha - a_n| = \alpha - a_n < \varepsilon$$

олар. Айдындыр ки, һәмин N әдәдини

$$\frac{1}{10^n} \geqslant \varepsilon$$

мүнасибәтиндән тапмаг кифайәтдир. n артдыгча $\frac{1}{10^n}$ кичилир вә $n \to \infty$-да $\frac{1}{10^n} \to 0$. Она көрә дә мүәййән N нөмрәсиндән сонра $\frac{1}{10^n} > \varepsilon$ олачагдыр.

Демәли, $n>N$ олдугда

$$|\alpha - a_n| = |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

олур. Eләчә дә $n>N$ олдугда $|a_n^1 - \alpha| < 0$ олар, йә'ни

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n^1 = \alpha.$$

Бу чәһәт юхарыда ики һәгиги әдәдин чәминә вердийимиз тә'рифи әсасландырмаға имкан верир. Биз ики α вә β һәгиги әдәдләринин чәмини онларын уйғун тәгриби гиймәтләринин чәми васитәсилә тә'йин этмишдик.

Һәр бир һәгиги әдәд бу һәгиги әдәди ифадә эдән сонсуз онлуг кәсрин сонлу һиссәләринин лимитиндән ибарәт олдуғу үчүн, ики һәгиги әдәдин чәми вә һасилинә уйғун сонлу һиссәләрин чәм вә һасилинин лимити кими тә'риф верилә биләр:

$$\alpha + \beta = \lim_{n\to\infty} (a_n + b_n)$$

$$\alpha \cdot \beta = \lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n)$$

§ 11. ЛИМИТ ҺАГГЫНДА ТЕОРЕМЛӘР

Әяни олмаг үчүн биз дәйишән кәмиййәтин лимитинә аид әсас теоремләри әввәлчә ардычыллыглар үзәриндә исбат эдәчәйик. Сонра кәсилмәз дәйишән кәмиййәтләр үчүн дә һәмин теоремләрин өз гүввәсиндә галдығыны көстәрәчәйик.

1. Юхарыда дәйишән кәмиййәтин лимитинә вердийимиз тә'рифин мүһүм чәһәтләрини айдынлашдырдыг вә бә'зи дәйишән кәмиййәтләрин лимитини тә'йин этдик. Лакин, кәмиййәтин бир вә я бир нечә лимити олдуғу мәсәләсинә тохунмадыг. Истәр һәлл этдийимиз мисалларда, истәрсә дә кәмиййәтин лимитинә вердийимиз тә'рифдә бу вә я дикәр әдәдин кәмиййәтин лимити олдуғуну йохладыг. Инди ортая белә бир суал

чыхыр: бәлкә, һәмин кәмиййәтин башга бир лимити дә вардыр? Бу суалын чавабы ашағыдакы теоремин исбатынданайдын олачагдыр.

Теорем 1. Әкәр һәр һансы бир ардычыллығын лимити варса, бу лимит ялныз бир дәнәдир.

Исбаты. Әксини фәрз эдәк; тутаг ки, a вә b әдәдләри, верилмиш $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ ардычыллығынын ики мүхтәлиф лимитләридир, йә'ни тутаг ки, бир тәрәфдән $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, дикәр тәрәфдән исә $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$-дир.

Ашкардыр ки, я $a>b$ вә я $b>a$ олачагдыр. Фәрз эдәк ки, $b>a$-дыр. Тутаг ки, $\varepsilon=\frac{b-a}{2}$-дир. Шәртә көрә a вә b верилмиш ардычыллығын лимитләридир. Онда һәмин верилмиш $\varepsilon=\frac{b-a}{2}$ әдәдинә көрә элә N_1, N_2 натурал әдәдләри олмалыдыр ки, бир тәрәфдән $n>N_1$ оланда $|a_n-a|<\frac{b-a}{2}$, дикәр тәрәфдән исә $n>N_2$ оланда $|a_n-b|<\frac{b-a}{2}$ олар. Демәли, һәм N_1 вә һәм дә N_2-дән бөйүк бүтүн n-ләр үчүн сонунчу ики бәрабәрсизликләр өдәнилмәлидир. Инди $b-a$ фәргини

$$b-a=(b-a_n)-(a-a_n)$$

шәклиндә язаг. Бурадан

$$b-a\leqslant|b-a_n|+|a-a_n|$$

бәрабәрсизлийини язмаг олар.

Юхарыдакы ики бәрабәрсизлийи нәзәрә алсаг

$$|b-a_n|+|a-a_n|<\frac{b-a}{2}+\frac{b-a}{2}=b-a$$

олдуғуну көрәрик.

Демәли, $b-a<b-a$ олмалыдыр.

Бу зиддиййәт эйни йығылан ардычыллығын ики мүхтәлиф лимити олмасы фәрзиййәсинин доғру олмадығыны көстәрир. Бу тәклиф элэчә дә $a>b$ олан һал үчүн дә исбат олунур.

Теорем 2. Лимити олан ардычыллыг мәһдуддур.

Исбаты. Тутаг ки, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$-дыр. Онда габагчадан верилән һәр бир мүсбәт ε әдәдинә (мәсәлән, $\varepsilon=1$ әдәдинә) көрә элә натурал N әдәди вардыр ки, $n>N$ оланда $|a_n-a|<1$ олмалыдыр. Онда, $n>N$ оланда

$$|a_n|=|a+(a_n-a)|\leqslant|a|+|a_n-a|<|a|+1$$

олачагдыр. Инди, верилмиш ардычыллығын биринчи N һәд-

динин

$$|a_1|,\ |a_2|, \dots,\ |a_{N-1}|,\ |a_N|$$

мүтләг гиймәтләрини нәзәрдән кечирәк. Верилмиш бу N әдәддән бириси башгаларындан кичик дейилдир.

Тутаг ки,

$$|a_r|,\ (r \leqslant N)$$

белә һәддир. Инди $|a|+1$ вә $|a_r|$ кими ики әдәди мүгайисә эдәк.

Бурада я

$$|a| + 1 \leqslant |a_r|$$

вә я да әксинә

$$|a| + 1 \geqslant |a_r|$$

олачагдыр.

$|a|+1$ вә $|a_r|$ әдәдләриндән бөйүк оланыны M илә ишарә эдәк. Ашкардыр ки, $M>0$-дыр.

Демәли, истәр $n \leqslant N$, истәрсә дә $n>N$ олан бүтүн n-ләр үчүн $|a_n|<M$ олачагдыр.

Бунунла теорем исбат эдилмиш олур.

2. Дәйишән кәмиййәтләрин гиймәтләри әдәд олдуғундан, әдәдләр үзәриндә эдилән һесаб әмәлләри дәйишән кәмиййәтләр үчүн тә'риф вә тәтбиг эдилә биләр.

1) x_n, y_n кими ики дәйишән кәмиййәтин чәми, онларын уйғун $n=1, 2, \dots$ гиймәтләриндә тә'йин эдилән үчүнчү $x_n + y_n$ дәйишән кәмиййәтинә дейилир.

2) x_n, y_n кими ики дәйишән кәмиййәт һасили онларын уйғун $n=1, 2, \dots$ гиймәтләриндә тә'йин эдилмиш үчүнчү $x_n \cdot y_n$ дәйишән кәмиййәтинә дейилир.

3) x_n, y_n кими ики дәйишән кәмиййәтин нисбәти $y_n \neq 0$ олдугда онларын уйғун $n = 1, 2, \dots$ гиймәтләрилә тә'йин эдилән үчүнчү $\frac{x_n}{y_n}$ дәйишән кәмиййәтинә дейилир.

Ашағыдакы теоремләр лимитә кечмәни бир әмәл кими характеризә этмәклә янашы, кәмиййәтләрин лимитини һесабламаг үчүн һәм дә әсас формуллардыр.

Тутаг ки, ихтияри ики

$$x_1,\ x_2, \dots,\ x_n, \dots \qquad (1)$$

вә

$$y_1,\ y_2, \dots,\ y_n, \dots \qquad (2)$$

ардычыллығы верилмишдир.

Теорем 3. Әкәр (1), (2) ардычыллыгларынын лимитләри вардырса, онда бу ардычыллыгларын чәминин дә лимити вардыр вә бу лимит (1), (2) ардычыллыгларынын уйғун лимитләри чәминә бәрабәрдир.

Исбаты. Тутаг ки, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$; исбат эдәк ки, $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x + y$

йә'ни: $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n+\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

Тутаг ки, $\varepsilon>0$ габагчадан верилән ихтияри әдәддир. Онда һөкмән елә N_1, N_2 натурал әдәдләри вардыр ки, $n>N_1$ олдугда

$$|x_n-x|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (3)$$

олмалыдыр, $n>N_2$ олдугда исә

$$|y_n-y|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (4)$$

олмалыдыр.

N_1, N_2 әдәдләриндән бөйүйүнү N илә ишарә едәк. $n>N$ олдугда айдындыр ки, һәм (3) вә һәм дә (4) бәрабәрсизликләри өдәниләчәкдир.

Онда $|(x_n+y_n)-(x+y)|=|(x_n-x)+(y_n-y)|\leqslant|x_n-x|+$ $+|y_n-y|$ олдуғундан, $n>N$ оланда $|(x_n+y_n)-$

$$-(x+y)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon \text{ олачагдыр.}$$

Демәли,

$$\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)=x+y$$

вә я

$$\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n+\lim_{n\to\infty}y_n$$

формулуну әлдә едәрик.

Теорем 4. Үчүнчү теоремин шәртләри дахилиндә ики ардычыллығын фәргинин лимитләри онларын лимитләри фәргинә бәрабәрдир, йә'ни:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n-\lim_{n\to\infty}y_n.$$

Теорем 5. Әкәр (1), (2) ардычыллыгларынын лимитләри вардырса, онда бу ардычыллыгларын һасилинин дә лимити вардыр вә бу лимит (1), (2) ардычыллыгларынын уйғун лимитләри һасилинә бәрабәрдир.

Исбаты. Тутаг ки, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y$; исбат едәк ки, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=xy$ вә я $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ олур, йә'ни исбат едәк ки, габагчадан верилмиш һәр бир мүсбәт ε әдәдинә көрә, елә натурал N әдәди вардыр ки, $n>N$ оланда $|x_ny_n-xy|<\varepsilon$ олур. x_ny_n-xy ифадәсинин үзәринә xy_n һәддини кәләк вә чыхаг. Онда:

$$x_ny_n-x\cdot y=x_ny_n-xy_n+xy_n-xy=(x_n-x)y_n+x(y_n-y)$$

аларыг. Бурадан

$$|x_ny_n-xy|\leqslant|x_n-x|\,|y_n|+|x|\,|y_n-y|.$$

Лимит һаггындакы икинчи теоремә көрә йығылан y_n кәмиййәти мәһдуддур, йә'ни элә бир мүсбәт M әдәди вардыр ки, бүтүн n-ләр үчүн

$$|x_n| \leqslant M$$

олачагдыр. Инди $|x|$ вә M әдәдләринин бөйүйүнү K илә ишарә эдәк.

Дикәр тәрәфдән $x_n \to x$, $y_n \to y$ олдуғу үчүн $\frac{\varepsilon}{2K}$ әдәдинә көрә элә натурал N әдәди вардыр ки, $n > N$ олан бүтүн n-ләр үчүн

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2K},$$

$$|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2K}$$

олачагдыр.

$n > N$ оланда, эйни заманда

$$|x_n y_n - xy| < \frac{\varepsilon K}{2K} + K\frac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon$$

олачагдыр.

Демәли,

$$\lim_{n \to \infty} (x_n y_n) = x \cdot y$$

вә я

$$\lim_{n \to \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \to \infty} x_n \cdot \lim_{n \to \infty} y_n$$

олур. Сабит кәмиййәтләрин лимити өзүнә бәрабәр олдуғу үчүн бу теоремә көрә,

$$\lim_{n \to \infty} (a \cdot x_n) = a \lim_{n \to \infty} x_n$$

олар; башга сөзлә десәк, әкәр бир ардычыллығын лимити варса, сабит кәмиййәти лимит ишарәси гаршысына чыхармаг олар.

Хүсуси һалда $a = -1$ оларса, $ay_n = -y_n$ олар. Демәли $\lim_{n \to \infty} (-y_n) = -y$ олар.

Онда

$$x_n - y_n = x_n + (-y_n)$$

эйнилийи доғру олдуғундан үчүнчү теоремә көрә,

$$\lim_{n \to \infty} (x_n - y_n) = \lim_{n \to \infty} [x_n + (-y_n)] = \lim_{n \to \infty} {}_n + \lim_{n \to \infty} (-y_n) = x - y$$

мүнасибәтини әлдә эдәрик. Бу исә дөрдүнчү теоремин исбатындан ибарәтдир.

Теорем 6. Һәмин шәртләр дахилиндә әкәр (2) ардычыллығынын лимити сыфыр дейилдирсә, онда (1) вә (2) ардычыллыгларынын нисбәтинин лимити онларын лимитләри нисбәтинә бәра-

бәрдир, йә'ни $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \neq 0$ оларса $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$.

Исбаты. Тутаг ки, енә дә $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$-дир.

Әввәлчә исбат эдәк ки,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{y}.$$

Она көрә дә, $\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y}\right|$ фәргини гиймәтләндирәк,

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y}\right| = \frac{|y_n - y|}{|y_n|\,|y|}$$

аларыг. Лимитин тә'рифинә көрә n-ин сечилмәси илә $|y_n - y|$-и габагчадан верилән һәр бир әдәддән о чүмләдән $\frac{|y|}{2}$-дән дә кичик этмәк олар, йә'ни элә бир натурал N_1 әдәди вардыр ки, $n > N_1$ оланда $|y_n - y| < \frac{|y|}{2}$ олачагдыр.

Онда,

$$|y| = |(y - y_n) + y_n| \leqslant |y - y_n| + |y_n|$$

доғру олдуғундан, $|y| - |y_n| \leqslant |y - y_n| < \frac{|y|}{2}$ олар.

Демәли, $n > N_1$ оланда

$$-|y_n| < -\frac{|y|}{2}$$

олмалыдыр. Бу бәрабәрсизлийин һәр тәрәфини (-1)-ә вурсаг

$$|y_n| > \frac{|y|}{2} \tag{5}$$

бәрабәрсизлийини аларыг. Дикәр тәрәфдән габагчадан верилмиш $\varepsilon > 0$ әдәдинә көрә элә N_2 натурал әдәди сечмәк мүмкүндүр ки, $n > N_2$ оланда

$$|y_n - y| < \frac{1}{2}|y|^2 \cdot \varepsilon \tag{6}$$

бәрабәрсизлийи тә'мин эдилир. Инди N_1, N_2 әдәдләриндән ән бөйүйүнү сечәк вә ону N_2 илә ишарә эдәк. Онда $n > N$ олдуг-

да һәм (5) вә һәм дә (6) бәрабәрсизлийи өдәнилир. Белә олдугда $n > N$-ләр үчүн

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y}\right| = \frac{|y_n - y|}{|y_n|\,|y|} < \frac{\frac{1}{2}|y|^2\cdot\varepsilon}{|y|\cdot\frac{1}{2}|y|} = \varepsilon$$

олачагдыр.

Демәли,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{y_n} = \frac{1}{y}$$

формулу доғрудур.

Инди дә

$$\frac{x_n}{y_n} = x_n\cdot\frac{1}{y_n}$$

шәклиндә язаг. Бешинчи теоремә көрә,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty}\left(x_n\cdot\frac{1}{y_n}\right) = \lim_{n\to\infty}x_n\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{y_n} = x\cdot\frac{1}{y} = \frac{x}{y}$$

олар. Бу исә

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}$$

теоремин һөкмүнү исбат эдир. Инди исә бәрабәрсизликләрдә лимитә кечмәнин мүмкүн олдуғуну әсасландыран ашағыдакы теореми исбат эдәк.

Теорем 7. Әкәр (1), (2) ардычыллыгларынын лимитләри вардырса, вә бу ардычыллыгларын һәдләри үчүн $x_n \leqslant y_n$ бәрабәрсизликләри өдәниләрсә, онда,

$$\lim_{n\to\infty}x_n \leqslant \lim_{n\to\infty}y_n$$

бәрабәрсизлийи өдәниләчәкдир.

Исбаты. Тутаг ки, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n = y$-дир. Теореми әввәлчә хүсуси һал үчүн исбат эдәк. Фәрз эдәк ки,

$$x_n = 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Сабитин лимити өзүнә бәрабәр олдуғуна көрә, $x=0$ олмалыдыр. Демәли, бу һалда $y_n \geqslant 0$ бәрабәрсизлийи верилдикдә $y \geqslant 0$ олдуғу исбат эдилмәлидир. Әксини фәрз эдәк. Фәрз эдәк ки, $y<0$-дир. Лимитин тә'рифинә көрә верилмиш $\varepsilon=|y|$ эдәдинә көрә кафи гәдәр бөйүк n үчүн

$$|y_n - y| < |y|$$

олачагдыр. Бу бәрабәрсизликләри

$$-|y| < y_n - y < |y|$$

шәклиндә дә яза биләрик.

Бурадан

$$y-|y| < y_n < |y| + y$$

олачағы айдындыр. $y < 0$ олдуғундан $|y| = -y$ олар. Демәли, $|y| + y = 0$ олмалыдыр. Она көрә дә, $y_n < |y_n| + y = 0$, вә я $y_n < 0$ олмалыдыр. Демәли, $y_n \geqslant 0$ шәртинә зидд нәтичәйә кәлиб чыхдыг. Бу зиддиййәт $y < 0$ фәрзиййәсинин дүзкүн олмадығыны көстәрир.

Инди үмуми һала кечәк. Шәртә көрә

$$x_n \leqslant y_n, \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

олмалыдыр. Бурадан $y_n - x_n \geqslant 0$ олур. Индичә исбат этдиймиз хүсуси һала көрә $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) \geqslant 0$ мүнасибәтини яза биләрик. Дөрдүнчү теоремә көрә $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = y - x$ йә'ни $y - x \geqslant 0$ олачагдыр. Бурадан, $x \leqslant y$ олачагдыр.

Демәли,

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim_{n\to\infty} y_n$$

олур. Бунунла да теорем исбат олунур.

Мисаллар. 1) Үмуми һәдди $\left(\frac{3n+4}{n}\right)^2$ олан ардычыллығын лимитини һесаблайын.

Бурада $x_n = \left(\frac{3n+4}{n}\right)^2$.

Ашкардыр ки,

$$x_n = \frac{3n+4}{n} \cdot \frac{3n+4}{n} = \left(3 + \frac{4}{n}\right)\left(3 + \frac{4}{n}\right)$$

шәклиндә яза биләрик.

Онда, лимитләр һаггындакы дөрдүнчү теоремә көрә,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(3 + \frac{4}{n}\right) \cdot \lim_{n\to\infty}\left(3 + \frac{4}{n}\right)$$

олар. Бурада $\frac{4}{n}$ сонсуз кичилән кәмиййәтдир, n-ин һүдудсуз артырылмасы илә $\frac{4}{n}$ сыфра яхынлашыр.

Она көрә дә,

$$\lim_{n\to\infty}\left(3 + \frac{4}{n}\right) = 3$$

олур. Демәли,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+4}{n}\right)^2 = 3\cdot 3 = 9$$

олур.

2) Үмуми һәдди $\frac{2n^3-3n^2+5n+1}{n^3-5}$ олан ардычыллығын лимитини һесаблайын.

Айдындыр ки, бурада:

$$x_n = \frac{2n^3-3n^2+5n+1}{n^3-5}$$

кәсринин сурәт вә мәхрәчини n^3-а бөлсәк

$$x_n = \frac{2-\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{1-\frac{5}{n^3}}$$

аларыг. Лимитә аид үчүнчү вә бешинчи теоремләрә көрә

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{5}{n^3}\right)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2 - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n} + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n^2} + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n^3}} = 2$$

олачагдыр.

Айдындыр ки,

$$\lim_{\to\infty}\frac{3}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{5}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{5}{n^3} = 0.$$

3. Биз лимитә аид әсас теоремләрин исбатында айры-айры кәмиййәтләрин лимитинин варлығыны фәрз едиб, онларын чәминин, һасилинин, нисбәтинин (мәхрәчин лимити сыфыр олмадыгда) лимитинин варлығыны исбат етдик.

Лакин айры-айры кәмиййәтләрин лимити олмадыгда белә, һәмин кәмиййәтләрин чәминин, һасилинин, нисбәтинин лимити мөвчуд ола биләр.

Мисаллар. 1) Тутаг ки, $x_n = 2n^2$,

$$y_n = 5 - 2n^2.$$

Бу кәмиййәтләрә уйғун ардычыллыгларын һәр икиси дағылыр, һәр икиси сонсуз бөйүйәндир. Лакин һәмин кәмиййәтләрин чәминин лимити 5-дир:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n) = \lim_{n\to\infty}[2n^2+(5-2n^2)] = \lim_{n\to\infty} 5 = 5.$$

2) Инди тутаг ки, $x_n = 3n^2$,

$$y_n = \frac{1}{n^2-1}.$$

Бурада $x_n = 3n^2$ кәмиййәтинин гиймәтләри ардычыллығы дағыландыр, бу кәмиййәт сонсуз бөйүйәндир. Лакин $x_n \cdot y_n$ кәмиййәтинин лимити вардыр.

Доғрудан да,

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty}\left[3n^2 \cdot \frac{1}{n^2-1}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{3}{1-\frac{1}{n^2}}\right] =$$

$$= \frac{3}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)} = 3.$$

3) Нәһайәт, $x_n = (-1)^n$, $y_n = n$ олсун.

Биз x_n вә y_n кәмиййәтләринин лимитләринин олмадығыны юхарыда көрүрүк. Лакин,

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{(-1)^n}{n}$$

кәмиййәтинин лимитинин сыфра бәрабәр олдуғуну көрмәк чәтин дейилдир. Эләчә дә, $x_n = 1 + (-1)^n$, $y_n = n$ кәмиййәтләринин лимитләринин олмадыгларыны юхарыда көрдүк. Юхарыда һәм дә, $\frac{x_n}{y_n} = \frac{1+(-1)^n}{n}$ кәмиййәти лимитинин сыфыр олдуғуну өйрәндик. Демәли, айры-айры ики кәмиййәтин лимити олмаса белә, онларын нисбәтинин лимити ола биләр.

4. Биз лимитә аид әсас теоремләри, гиймәтләри ардычыллыг олан дәйишән кәмиййәтләр үчүн исбат этдик. Эйни теоремләри кәсилмәз дәйишән кәмиййәтләр үчүн дә исбат эдә биләрик. Нүмунә үчүн бу теоремләрдән ики дәйишән кәмиййәтин чәминин лимити һаггындакы теореми исбат эдәк.

Теорем. Дәйишмә просесләри эйни, лимитләри уйғун олараг a вә b олан дәйишән x вә y кәмиййәтләри чәминин лимити вардыр вә бу лимит $a+b$-йә бәрабәрдир. Башга сөзлә, лимити олан ики дәйишән чәминин лимити һәмин кәмиййәтләрин лимитләри чәминә бәрабәрдир, йә'ни, әкәр, $\lim x = a$, $\lim y = b$ исә $\lim(x+y) = a+b$-дир.

Исбаты. Теореми исбат этмәк үчүн x вә y кәмиййәтләринин дәйишмә просесиндә $[(x+y)-(a+b)]$ фәргинин габагчадан верилән ихтияри мүсбәт ε әдәдиндән кичик ола билдийи-

ни вә кичик галдығыны исбат этмәлийик. Айдындыр ки, x вә y кәмиййәтләринин бүтүн дәйишмә просесләриндә

$$|(x+y)-(a+b)| = |(x-a)+(y-b)| \leqslant$$
$$\leqslant |x-a| + |y-b|$$

бәрабәрсизлийи өдәнилир. Лакин шәртә көрә $x \to a$ олдуғундан дәйишмә просесинин мүәййән һалындан башлаяраг кәләчәк бүтүн һалларда $|x-a| < \frac{\varepsilon}{2}$ бәрабәрсизлийи тә'мин эдиләчәкдир. Просесин һәмин һалыны гейд эдәк. Шәртә көрә эйни заманда $y \to b$-дир. Енә дә y-ин дәйишмә просесинин мүәййән һалындан башлаяраг кәләчәк бүтүн һалларда $|y-b| < \frac{\varepsilon}{2}$ бәрабәрсизлийи өдәниләчәкдир. Биз y-ин дә дәйишмә просесинин һәмин һалыны гейд эдәк. Инди дәйишмә просесинин гейд этдийимиз һаллары мүхтәлифдирсә, бу һаллардан сонра кәлән һалы гейд эдәк. Айдындыр ки, просесин бу һалындан башлаяраг кәләчәк бүтүн һалларда

$$|x-a| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$|y-b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

бәрабәрсизликләри эйни заманда өдәниләчәкдир. Онда просесин һәмин һалындан башлаяраг

$$|(x+y)-(a+b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

олачагдыр, йә'ни

$$\lim (x+y) = a+b$$

вә я

$$\lim (x+y) = \lim x + \lim y$$

олур. Элә дә, о бири теоремләри исбат этмәк олар.

5. $x \to a$-да ики функсиянын чәминин, һасилинин вә мәхрәчин лимити сыфыр олмадыгда исә һәмин ики функсиянын нисбәтинин лимити уйғун олараг, онларын лимитләри чәминә, һасилинә, нисбәтинә бәрабәр олдуғуну исбат этмәк олар.

Гейд этмәк лазымдыр ки, лимит анлайышынын юхарыда верилән мүкәммәл риязи тә'рифи кечән әсрин әввәлләриндә гәт'и мүәййән эдилмишдир. Бу тә'риф бөйүк франсыз риязийятчысы Кошинин (1789—1857) ады илә бағлыдыр. Кошидән әввәл лимитә вә бир сыра башга риязи анлайышлара верилән тә'рифләр дәгиг олмамышдыр. Түкәнмәз ярадычылыг исте'дадына малик олан Коши, риязи анализин бир чох анлайышларыны һәмишәлик дирчәлтмишдир вә дүзкүн инкишаф йолуна салмышдыр.

§ 12. ҺӘГИГИ ӘДӘДЛӘР НӘЗӘРИЙЙӘСИНӘ ДАИР

Китабын I һиссәсиндә сонлу вә сонсуз олуг кәсри һәгиги әдәд дейә адландырдыг. Расионал әдәди ифадә этмәйән онлуг кәсрләрә исә иррасионал әдәд ады вердик.

Һәмин бәһсдә расионал әдәдләрин дөври онлуг кәсрләрдән, иррасионал әдәдләрин исә дөври олмаян сонсуз онлуг кәсрләрдән ибарәт олуғуну сүбут этдик. Лакин бу тә'рифләр чох да гәнаәтбәхш һесаб эдилә билмәз.

Доғрудан да, онлуг системи бүтүн башга мүмкүн олан системләрдән тәбиәти э'тибарилә һеч дә фәргләнмир. Системин әсасында он көтүрдүйүмүз кими башга әдәд дә көтүрә биләрик. Буна көрә дә системин әсасынын 10 вә я башга әдәд олмасындан асылы олмаяраг, һәгиги әдәдин даһа үмуми тә'рифинк вәрмәк зәрурәти мейдана чыхыр.

Һәгиги әдәдин үмуми тә'рифини бәсит шәкилдә ашағыдакы кими верә биләрик. Белә ки, бурада расионал әдәдләри вә әдәд оху анлайышларыны һазыр гәбул эдәҹәйик. Әдәд оху үзәриндә учлары расионал әдәдләрдән ибарәт олан мүәййән парчалар ардычыллығы көтүрәк:

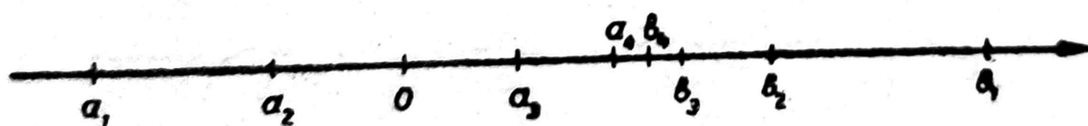
$$I_1,\ I_2,\ I_3,\ \ldots,\ I_n,\ \ldots$$

белә ки, бурада һәр сонракы парча әввәлкинә дахил олур; n һүдудсуз оларагартдыгда n-чи I_n парчасынын бою исә сыфра яхынлашыр. Бу ҹүр ардычыллыглара *бир-биринә дахил олан парчалар ардычыллығы* дейилир.

Тутаг ки, бу парчаларын учлары a_n, b_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ расионал әдәдләриндән ибарәтдир:

$$I_n = [a_n,\ b_n].$$

Парчаларын бир-биринә дахил олмасы да 20-чи шәкилдә көстәрилмишдир.



20-чи шәкил

Үмумиййәтлә $[a, b]$ парчасынын узунлуғу $b-a$ әдәдинә дейилир (бурада $b > a$ олмалыдыр).

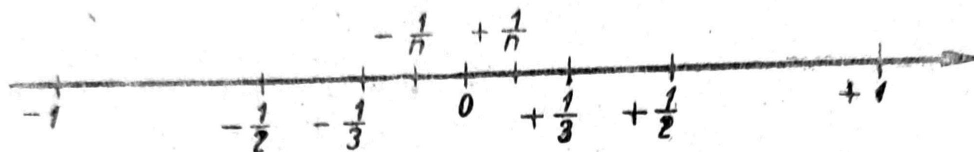
Гейд этмәк лазымдыр ки, һәр бир-биринә дахил парчалар-ардычыллығыны бир-биринә дахил олан парчалар ардычыллығы адландырмаг олмаз. Бурада әсас шәртләрдән бириси парчаларын бойларынын кет-кетә сыфра яхынлашмасыдыр.

Мәсәлән:

$$[-1, +1],\ \left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right],\ \left[-\frac{1}{3}, +\frac{1}{3}\right], \ldots,$$
$$\left[-\frac{1}{n}, +\frac{1}{n}\right], \ldots$$

парчалар ардычыллығы бир-биринә дахил ола парчалар ардычыллығыдыр (21-чи шәкил).

Бурада һәр сонракы парча әввәлки парчая дахилдир вә әлавә



21-чи шәкил

$$I_n = \left[-\frac{1}{n},\ +\frac{1}{n}\right]$$

парчасынын узунлуғу $n \to +\infty$-да

$$\frac{1}{n} - \left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n}$$

сыфра яхынлашыр.

Ашағыдакы һәндәси тәклифи әсас гәбул эдәк.

Әдәд охунда бир-биринә дахил парчалар ардычыллығынын һамысына мәхсус бир нөгтә вардыр. Һәмин нөгтәни һәгиги әдәд адландыраг. Расионал олмаян нөгтәни исә *иррасионал* әдәд адландыраг. Инди бир-биринә дахил парчалар ардычыллығынын һамысына мәхсус олан нөгтәнин еканә олуб-олмамасы суалына чаваб верәк.

Исбат эдәк ки, **һәр бир-биринә дахил парчалар ардычыллығынын һамысына мәхсус ялныз бир нөгтә вардыр.**

Тутаг ки, бир-биринә дахил

$$[a_1,\ b_1],\ [a_2,\ b_2],\ [a_3,\ b_3],\ \ldots,\ [a_n,\ b_n],\ \ldots$$

парчалар ардычыллығынын һамысына ики мүхтәлиф a вә b нөгтәләри дахилдир ($a \neq b$). Онда айдындыр ки, я $a < b$ вә я $a > b$ олачагдыр. Тутаг ки, $a < b$-дир. Онда $b - a > 0$ олар. Бу һалда һәмин әдәдләрин тә'йин этдийи $[a,\ b]$ парчасы эйни заманда бүтүн $[a_n, b_n]$ парчаларына дахил олачагдыр. Бу исә мүмкүн дейилдир, чүнки n-ин артмасы илә $b_n - a_n$ фәрги истәнилән гәдәр кичилдийиндән мүәййән $n = N_0$ нөмрәсиндән сонра $b_n - a_n < b - a$ олачагдыр; узунлуғу сыфыр олмаян парча, узунлуглары сыфра яхынлашан парчалара дахил ола билмәз. Бу зиддиййәт $a \neq b$ фәрзиййәсинин доғру олмадығыны сүбут эдир. Беләликлә, һәгиги әдәдин инди вердийимиз тә'рифи васитәсилә әдәд охунун нөгтәләри илә әдәдләр арасында там уйғунлуг ярадылмыш олду.

Һәгиги әдәдин бу тә'рифиндә әслиндә һеч бир мүһүм енилик йохдур. Бурада һәгиги әдәдин сонсуз онлуг кәср кими тә'рифи бир гәдәр үмуми шәкилдә дейилмишдир. Енә дә охучу шүбһә этмәйә һаглыдыр. Эйни заманда бүтүн парчалара дахил олан бу „нөгтә“ нә демәкдир? Биз белә бир нөгтәнин

варлығыны бир һәндәси фәрзиййә кими гәбул етдик. Бу фәрзиййәни һәндәсәдә тәсадүф етдиийимиз тәчрүбәләрдә интиутив доғру һесаб едилән башга аксиомлар кими гәбул етдик. Әсл мәсәлә күндәлик һәят вә һәрәкәтләримиздә һисс едәрәк доғру һесаб олунан тәклифләрин аксиом дейә гәбул едилмәси дейил, бу тәклифләрдән дүзкүн мәнтиги нәзәриййәнин һасил едилә билмәси имканыдыр. Она көрә дә, вердийимиз тә'рифин һәятилийи, нәзәри чәһәтдән тутарлы олмасы вә бир нәзәриййә чәрчивәси дахилиндә зиддиййәтсизлик тәләбләри дәрһал мейдана чыхыр. Һәгиги әдәдә вердийимиз ени тә'рифи бу чәһәтдән йохлаяг.

Биз формал чәһәтдән әдәд охунун ялныз расионал әдәдләрдән ибарәт олдуғуну фәрз едә биләрик. Сонра иррасионал әдәди (йә'ни ени тәбиәтли әдәди) әдәд оху үзәриндә бир-биринә дахил парчалар ардычыллығыны көстәрән символ кими тә'йин едә биләрдик. Бунунла иррасионал нөгтә, узунлуглары сыфра яхынлашан бир-биринә дахил расионал парчалар васитәсилә тамам тә'йин едилмиш оларды. Башга сөзлә, бизим һәндәси фәрзиййәмиз тә'риф олараг гәбул олуна биләр. Иррасионал әдәди бир-биринә дахил парчалар ардычыллығы кими тә'риф етдикдә, көрәк иррасионал әдәдләри топламаға, чыхмаға, вурмаға, бөлмәйә имканымыз вармы? Эләчә дә бу ишдән сонра иррасионал әдәдләр арасында расионал әдәдләр мейданында олдуғу кими бәрабәрсизлик мүнасибәти дүзәлдә биләрикми? Бурада әсас мәсәлә иррасионал әдәдләрин ени нәзәриййәсинин расионал әдәдләр нәзәриййәсинә зидд чыхмамасы, онун билаваситә давамы, үмумиләшмәси олмасы мәсәләсидир.

Мәсәлән, иррасионал α вә β әдәдләринин чәмини тә'йин етмәк үчүн бу α вә β иррасионал әдәдләрини тә'йин едән бир-биринә дахил парчалар ардычыллығы васитәсилә, чәми ифадә едән бир-биринә дахил башга бир парчалар ардычыллығыны гурмалыйыг. Бу ардычыллығы α вә β әдәдләрини тә'йин едән парчаларын уйғун учларынын чәминдән дүзәлән ардычыллыг кими тә'йин етсәк, еләчә дә $\alpha \cdot \beta$ һасилини, $\alpha - \beta$ фәргини, $\frac{\alpha}{\beta}$ нисбәтини уйғун учларын һасилиндән, фәргиндән, нисбәтиндән дүзәлән ардычыллыглар кими тә'йин етсәк, расионал әдәдләр нәзәриййәсинин әсас хассәләри хүсуси һалда өдәниләр вә она зидд олмаян һәгиги әдәдләр нәзәриййәси һасил едиләр. Бу ганунларын (коммутативлик, ассосиативлик, дистрибутивлик) иррасионал әдәдләрә хас олдуғуну көстәрмәк һеч бир чәтинлик төрәтмир. Лакин адәтән риязийяты өйрәнмәйә башлаян һәр кәс әввәлчә онун мәнтиги әсаслары илә дейил, тәтбиги илә марагланыр. Тарихән дә белә олмушдур. XIX әсрин ахырларына гәдәр бөйүк риязийятчыларын һамысы әдәд һаггында садә бир тәсәввүрә саһиб олараг ени кәшфләр етмишләр. Белә бир йолла кетмәк һеч дә муасир адама бә-

раәт газандырмыр. Риязиййатын мәнтиги әсасларыны өйрәнмәк тәкчә риязиййат хатиринә дейил, мәнтиги күчләндирмәк, һоризонту кениш олан бир билийә йийәләнмәк, һәјати һадисәләри даһа дәриндән дәрк этмәйә көмәк эдән әсас васитәдир.

XIX әсрдән башлаяраг әдәд һаггында садә тәсәввүр даирәсиндән чыхан вә әдәдләр нәзәриййәсини әсасландырмаға чалышан риязиййатчылар да аз олмамышдыр.

Бу алимләрдән Йоһан Вейерштрас (1815—1897), Рихард Дедекинд (1831—1916), Георги Кантор (1845—1918) совет алими А. Н. Колмогоров вә башгалары олмушдур.

Дедекиндин идеясы расионал әдәдләр синфиндә кәсикләр нәзәриййәсинә әсасланыр.

Тутаг ки, һәр һансы васитә илә олурса-олсун расионал әдәдләр чохлуғу ики A вә B синфинә айрылмышдыр, белә ки, B синфинин һәр бир b әдәди A синфинин һәр бир a әдәдиндән бөйүкдүр. Расионал әдәдләр синфиндә һәр бир белә тәснифә *кәсик* дейилир. Расионал әдәдләр синфиндә һәр бир кәсик ашағыдакы үч һалын бириси илә тә'йин эдилир.

1) A синфиндә ән бөйүк элемент вардыр. Буну a^* илә ишарә эдәк. A әдәдләр чохлуғунун ән бөйүк элементи элә a^* элементинә дейилир ки, 1) A-дакы әдәдләрин һамысы a^*-дан бөйүк дейил вә 2) һәр бир $\varepsilon > 0$ әдәдинә көрә A-нын элә a_0 элементи вардыр ки,

$$a_0 > a^* - \varepsilon$$

олур.

2) B синфиндә ән кичик b^* элементи вардыр.

B әдәдләр чохлуғунун ән кичик элементи элә b^* әдәдинә дейилир ки, 1) B-дәки бүтүн элементләр b^*-дан кичик дейил вә 2) һәр бир $\varepsilon > 0$ әдәдинә көрә B-нин элә b_0 элементини тапмаг олар ки,

$$b_0 < b^* + \varepsilon.$$

3) нә A синфинин ән бөйүк, нә дә B синфинин ән кичик элементи вардыр.

Башга һал йохдур. Мәсәлән, белә бир һал мүмкүн дейилдир:

Тутаг ки, A синфинин ән бөйүк элементи (a^*), B синфинин ән кичик элементи (b^*) вардыр. Әкәр бу һал мүмкүн олсайды, онда $\frac{a^* + b^*}{2}$ элементи, a^*-дан бөйүк вә b^*-дан кичик олдуғу үчүн биринчи һалда B-йә, икинчи һалда исә A-я дахил олмалы иди. Бу исә кәсийин тә'рифинә зиддир, чүнки A синфинин һәр бир элементи, о чүмләдән $\frac{a^* + b^*}{2}$ элементи B синфинин һәр бир элементиндән о чүмләдән $\frac{a^* + b^*}{2}$-дән кичик, йә'ни

$\frac{a^*+b^*}{2} < \frac{a^*+b^*}{2}$ олмалыдыр. Үчүнчү һалда, йә'ни A синфиндә ән бөйүк элемент, B синфиндә исә ән кичик элемент олмамасы һалында кәсийин тә'йин этдийи вә я ифадә этдийи әдәдә *иррасионал әдәд* дейилир.

Һәгиги әдәдләрин дикәр бир нәзәриййәсини Г. Кантор вермишдир. Кантор нәзәриййәсинин әсасы бизә мә'лум олан ашағыдакы мүлаһизәләрдир:

1) һәгиги әдәдләри сонсуз онлуг кәср кими изаһ этмәк;

2) сонсуз онлуг кәсрләрә сонлу онлуг кәсрләрин лимити кими бахмаг.

Һәгиги әдәдләри Дедекинд вә Кантор нәзәриййәси бири дикәриндән нәтичә кими әлдә эдилә биләр.

Бир-биринә дахил парчалар һаггындакы принсипә истинад эдәрәк ардычыллыгларын йығылмасыны көстәрән ашағыдакы әламәти исбат эдәк. Артмаян вә сыфра йығылан һәр бир

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$$

мүсбәт әдәдләр ардычыллығына, ихтияри натурал p вә n әдәдинә көрә

$$| x_n - x_{n+p} | < \varepsilon_n \qquad (1)$$

шәртинин олмасы

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \qquad (2)$$

ардычыллығынын йығылмасы үчүн зәрури вә кафидир.

Буну исбат этмәк үчүн әввәлчә (1) шәртинин зәрури олдуғуну исбат эдәк, йә'ни (2) ардычыллығынын йығылан олдуғуну фәрз эдиб, (1) шәртинин өдәнилдийини исбат эдәк. Тутаг ки, (2) ардычыллығы мүәййән c әдәдинә йығылыр. Монотон азалан вә сыфра йығылан ихтияри

$$\delta_1. \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$$

мүсбәт әдәдләр ардычыллығыны көтүрәк. Айдындыр ки, һәр бир δ_m әдәдинә көрә элә N_m әдәдини тапмаг олар ки, $n > N_m$ олдугда

$$| x_n - c | \leqslant \frac{\delta_m}{2}$$

олар. Демәли, бу һалда

$$| x_n - x_{n+p} | = | (x_n - c) - (x_{n+p} - c) | \leqslant$$
$$\leqslant | x_n - c | + | x_{n+p} - c | < \frac{\delta_m}{2} + \frac{\delta_m}{2} = \delta_m$$

олачагдыр (бурада $n > N_m$ иди).

Инди исә тутаг ки,

$$n \leqslant N_1, \quad n + p > N_1;$$

онда

$$| x_n - x_{n+p} | \leqslant | x_n - c | + | x_{n+p} - c | < l + \frac{\delta_1}{2}$$

олмалыдыр. Бурада l әдәди

$$|x_1 - c|, \quad |x_2 - c|, \quad \ldots, \quad |x_{N_1} - c|$$

әдәдләриндән ән бөйүйүдүр. Айдындыр ки, n вә $n+p$ натурал әдәдләринин икисиндән бириси N_1-дән бөйүк олмадыгда

$$|x_n - x_{n+p}| \leqslant |x_n - c| + |x_{n+p} - c| < 2l$$

олар. Үмуми һәдди (ε_n) ашағыдакы шәртләрә табе олан

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$$

мүсбәт әдәдләр ардычыллығыны гураг.

1) $n \leqslant N_1$

олдугда

$$\varepsilon_n = 2l + \delta_1$$

олсун.

2) $N_m < n \leqslant N_{m+1}$

олдугда исә

$$\varepsilon_n = \delta_m$$

олсун.

Айдындыр ки, һәмин шәртләр васитәсилә тә'йин эдилән ε_n-ә көрә

$$|x_n - x_{n+p}| < \varepsilon_n$$

өдәниләчәкдир; бундан башга $n \to \infty$-да $\varepsilon_n \to 0$-ыр (чүнки $\delta_m \to 0$).

Инди исә шәртин кафи олдуғуну исбат эдәк, йә'ни

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$$

артмаян вә сыфра йығылан әдәдләр ардычыллығына, ихтияри p натурал әдәдинә вә мүәййән m әдәдини ашан бүтүн n-ләрә көрә

$$|x_n - x_{n+p}| < \varepsilon_n \quad (3)$$

өдәнилдийини фәрз эдиб (2) ардычыллығынын һәр һансы бир һәгиги c әдәдинә йығылдығыны исбат эдәк.

Тутаг ки, a_ν әдәди сонлу сайда

$$x_{m+1} - \varepsilon_{m+1}, \quad x_{m+2} - \varepsilon_{m+2}, \ldots, x_\nu - \varepsilon_\nu$$

әдәдләрини ән бөйүйү, b_ν әдәди исә сонлу сайда

$$x_{m+1} + \varepsilon_{m+1}, \quad x_{m+2} + \varepsilon_{m+2}, \ldots, x_\nu + \varepsilon_\nu$$

әдәдләринин ән кичийидир. ν артанда a_ν әдәдинин азалмаячағы, b_ν ин исә артмаячағы айдындыр, чүнки сонлу сайда әдәдләрә ени әдәдләр гошулугда ән бөйүк олан әдәд азалмаз, ән кичик әдәд исә артмаз. Буну мисал үзәриндә изаһ эдәк. Тутаг ки,

$$1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, 2, 2\frac{1}{3}$$

әдәдләри верилмишдир. Бу әдәдләрдән ән бөйүйү $2\frac{1}{3}$, ән

кичийи исә $\frac{1}{2}$-дир (бурада әйни чохлуғун көтүрүлмәси маһиййәтә зидд дейилдир).

Инди һәмин әдәдләрә ени әдәдләр гошаг:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, 2, 2\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 3\frac{1}{2}.$$

Бу әдәдләрдән ән бөйүйү $3\frac{1}{2}$, ән кичийи исә $\frac{1}{3}$-дир.

Әкәр $3\frac{1}{2}$ дахил олмайыб, $2\frac{1}{2}$-дән кичик әдәд дахил олса иди, ән бөйүк әдәд енә дә $2\frac{1}{2}$ олачагды.

Она көрә дә әкәр $\nu > \mu$ исә

$$a_\nu \geqslant a_\mu,$$
$$b_\nu \leqslant b_\mu$$

олмалыдыр.

(3) бәрабәрсизлийини белә дә яза биләрик:

$$-\varepsilon_n < x_n - x_{n+p} < +\varepsilon_n. \qquad (4)$$

Тутаг ки, $n \leqslant \nu$, $p = q + \nu - n$ (йә'ни $q \leqslant p$). (4) бәрабәрсизлийиндән

$$x_n - \varepsilon_n < x_{\nu+q} < x_n + \varepsilon_n$$

аларыг.

Бу бәрабәрсизликләрдә

$$n = m + 1, m + 2, \ldots, \nu$$

еринә яздыгда көрүрүк ки, һәмин бәрабәрсизлик әйни заманда

$$x_{m+1} - \varepsilon_{m+1}, \quad x_{m+2} - \sigma_{m+2}, \ldots, x_\nu - \varepsilon_\nu$$

фәргләри вә

$$x_{m+1} + \varepsilon_{m+1}, \quad x_{m+2} + \varepsilon_{m+2}, \ldots, x_\nu + \varepsilon_\nu$$

чәмләринин һәр бир һәдди үчүн өдәнилир. Онда уйғун олараг һәмин бәрабәрсизлик бу әдәдләрдән ән кичийи вә ән бөйүйү үчүн дә өдәниләчәкдир:

$$a_\nu < x_{\nu+q} < b_\nu.$$

Инди

$$\lambda < \mu < \nu$$

мүнасибәтини өдәйән вә m-дән бөйүк олан ихтияри үч әдәд көтүрәк. Юхарыда гейд этдийимизә көрә

$$a_\lambda \leqslant a_\mu \leqslant a_\nu < b_\nu \leqslant b_\mu \leqslant b_\lambda$$

яза биләрик. Бу бәрабәрсизликләри нәзәрдән кечирдикдә көрүрүк ки, $[a_\nu, b_\nu]$ парчасы $[a_\mu, b_\mu]$ парчасына, бу да $[a_\lambda, b_\lambda]$ парчасына дахилдир.

Дикәр тәрәфдән

$$b_\nu - a_\nu \leqslant (x_\nu + \varepsilon_\nu) - (x_\nu - \varepsilon_\nu) = 2\varepsilon_\nu$$

олур. Бурада ν-ни кафи гәдәр бөйүк көтүрмәклә ε_n-ни истәнилән гәдәр кичик етмәк олар. Бу ону көстәрир ки, $[a_{m+1}, b_{m+1}], \ldots, [a_\nu, b_\nu]$ парчалары бир-биринә дахил вә бойлары сыфра яхынлашан парчалар ардычыллығыдыр. Онда, эйни заманда бу парчалара дахил олан бир c нөгтәси вардыр. Белә олдугда ν-ни кафи гәдәр бөйүк көтүрсәк

$$| x_{\nu+q} - c | < \varepsilon$$

олар. Башга сөзлә

$$\lim_{n\to\infty} x_n = c$$

олар.

Үмумилийи позмадан a_ν, b_ν-ләринин расионал әдәдләр олдуғуну фәрз етмәк олар. Әкс һалда $[a_\nu, b_\nu]$ парчаларынын учлары иррасионал әдәдләр олдугда онлары әксийи вә артыглығы илә уйғун сонлу онлуг һиссәләри илә (йә'ни расионал әдәдләрлә) әвәз етмәк лазымдыр.

ӘДӘБИЙЯТ

1. Ағаев Һ. Н.—Лимит һаггында, физика вә риязийят тәдриси (методик мәгаләләр мәчмуәси) дөрдүнчү бурахылыш, Азәрбайчан ССР Маариф Назирлийи, Бакы, 1957.

2. Ағаев Һ. Н.—Риязийятын маһиййәтинә даир, „Физика вә риязийят тәдриси" (методик мәгаләләр мәчмуәси), дөрдүнчү бурахылыш, Азәрбайчан ССР Маариф Назирлийи, Бакы, 1958

3. Андронов И. К. Арифметика дробных чисел и основных величин. Учпедгиз, 1953.

4. Андронов И. К. Арифметика натуральных чисел. Учпедгиз, 1954.

5. Белоновский П. Д. Основы теоретической арифметики. Учпедгиз, 1938.

6. Берман Г. Н. Число и наука о нем. Гостехиздат, 1948.

7. Большая Советская Энциклопедия, т. т. 3 и 47.

8. Ващенко-Захарченко М. Е. История математики т. 1, Киев, 1883.

9. Выгодский М. Я. Арифметика и алгебра в древнем мире. Гостехиздат, 1941.

10. Каши А. Л. Ключ арифметики. Гостехиздат, 1956.

11. Курант Р. и Роббинс Г. Что такое математика, ОГИЗ, 1947.

12. Математика, ее содержание, методы и значение, том 1. Изд-во АН СССР, 1956.

13. Математическое просвещение, № 2, 1957.

14. Маркушевич А. И. Возвратные последовательности. Гостехиздат, 1951.

15. Маркушевич А. И. Действительные числа и основные принципы теории пределов. Изд-во АПН РСФСР, 1948.

16. Мәммәдбәйли Һ. Ч.—Мүһәммәд Нәсирәддин Туси, Бакы, Ушагкәнчнәшр, 1957.

17. Молодший В. Н. Основы учения о числе в XVIII веке. Учпедгиз, 1953.

18. З. И. Хәлилов—Даирәнин квадратурасы, Азәрб. ЭА нәшрийяты, Бакы, 1954.

19. З. И. Хәлилов—Инсанлар индики риязийята нечә кәлиб чатмышлар. Бакы, Ушагкәнчнәшр, 1955.

20. Энциклопедия элементарной математики. Книга первая—арифметика. Гостехиздат, 1951.

МҮНДӘРИЧАТ

I һиссә Әдәд анлайышынын тәкамүлү

II һиссә. Ардычыллыглар вә лимитләр

ДҮЗӘЛИШ

Сәһифә	Сәтир	Ҝетмишдир	Охунмалыдыр
7	юх. 5	(*пег*)	(*пеґ*)
18	„ 10	$A+(B—C)$	$(A+B)—C$
30	аш. 6	әсрләрлә	әсрләрдә
31	„ 6	садә	әсли
61	„ 3	Бу хассә юхарыда	Бу хассә, йә'ни
97	аш. 3	a^n	a_n
118	„ 5	$M>0$	$N>0$
123	„ 7	$\frac{1}{\varepsilon}=10$	$\frac{1}{\varepsilon}=100$
140	юх. 12	*B*-дән	*V*-дән
154	юх. 11	$\|y—b\|>\frac{\varepsilon}{2}$	$\|y—b\|<\frac{\varepsilon}{2}$

Сифариш 525

5 ман. 10 гәп.

Г. Н. АГАЕВ

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА И ПРЕДЕЛЫ

(на азербайджанском языке)

АЗЕРНЕФТНЕШР

Баку — 1958